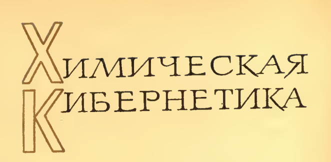


И. Н. МИНСКЕР

Оперативное управление химико-технологическими комплексами







Бояринов А. И., Кафаров В. В.

Методы оптимизации в химии и химической технологии, 1969.

Луценко В. А., Финякин Л. Н.

Аналоговые вычислительные машины в химии и химической технологии, 1969.

Таубман Е. И.

Расчет и моделирование выпарных установок, 1970.

Перов В. Л.

Основы теории автоматического регулирования химико-технологических процессов, 1970.

Масленников И. М., Цирлин А. М., Добролюбов Г. В.

Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами химической промышленности, 1971.

Кафаров В. В.

Методы кибернетики в химии и химической технологии, 1971.

И. Н. МИНСКЕР

ОПЕРАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ КОМПЛЕКСАМИ

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ХИМИЯ»
МОСКВА 1972

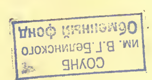
УДК 66-5
М 57

И. Н. Минскер. **Оперативное управление химико-технологическими комплексами.**

В книге рассматриваются вопросы оптимального оперативного управления сложными разветвленными химико-технологическими комплексами: системами последовательно, параллельно и последовательно-параллельно работающего оборудования (насосов, компрессоров, тепло- и массообменных аппаратов и химических реакторов). Приведены примеры решения конкретных задач оптимизации: распределение нагрузок по агрегатам различных химических производств (блоки разделения воздуха, установки очистки, реакторы окиси этилена, аппараты производства хлористого винила и пр.). Даны рекомендации по проектированию соответствующих систем автоматического регулирования.

Книга рассчитана на широкий круг инженерно-технических и научных работников исследовательских и проектных институтов, занимающихся вопросами оптимального оперативного управления химическими и нефтехимическими производствами, а также на работников заводских служб автоматизации и КИП.

В книге содержится 73 рисунка, 8 таблиц и 134 библиографические ссылки.



3-14-2
85-72

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА I

РАЗВЕТВЛЕННЫЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

ВВЕДЕНИЕ

Современное крупное химическое производство состоит из большого числа разнотипных аппаратов, связанных между собой технологической схемой. Характер этих связей может быть весьма различным: продукты и полупродукты, вырабатываемые в одних аппаратах, поступают в следующие по ходу процесса аппараты: тепло, выделяемое на одном участке производства, утилизируется на другом; сырье и энергия распределяются между различными потребителями.

Задача оптимального управления состоит не только в том, чтобы поддерживать наиболее эффективный режим в каждом аппарате в отдельности, а и в том, чтобы установить между элементами технологической схемы связи, обеспечивающие оптимальную работу всего производства в целом.

Практически решение всей комплексной задачи управления крупным производством связано с большими трудностями, причиной которых является высокая размерность исходной задачи. Поэтому обычно общая задача управления разбивается на несколько подзадач, при этом создается так называемая иерархическая система управления. Для разбиения задачи управления на подзадачи используются методы декомпозиции [1–3].

На первой ступени управления осуществляется оптимизация отдельных аппаратов. В неавтоматизированном производстве эту задачу решает заводской персонал, обслуживающий аппараты (операторы, аппаратчики); в автоматизированном производстве эти функции переданы регуляторам, иногда небольшим специализированным вычислительным машинам. Необходимо учитывать, что при независимой оптимизации критерии оптимальности отдельных аппаратов и установок могут противоречить друг другу.

На второй ступени управления режимы отдельных аппаратов согласуют таким образом, чтобы общий критерий оптимальности достигал максимума. Согласование или координация режимов работы осуществляется диспетчером производства на основании информации, поступающей с первой ступени управления. В автоматизированном производстве эти задачи

решаются управляющими вычислительными машинами (см., например,[4]).

Проблемы и методы управления на первой и второй ступенях существенно различаются. Объектом управления системы нижнего уровня является отдельный аппарат. Цель управления — достижение наибольшей эффективности аппарата — может быть сформулирована как в экономических терминах (максимальная производительность, минимальная себестоимость), так и в технологических терминах (максимальный выход целевого продукта, минимальная концентрация побочного продукта и т. п.). Как правило, число управляющих переменных невелико, а связи между критерием управления и управляющими переменными достаточно сложны. Поэтому в алгоритмах управления используется математическая модель объекта, либо им придается поисковый характер.

На второй ступени объектом управления является совокупность большого числа аппаратов. Критерием оптимальности служит обычно технико-экономический показатель (прибыль, себестоимость и т. д.). Число переменных, как правило, так велико, что создание эффективной поисковой системы управления оказывается затруднительным. В системе управления используется математическая модель объекта. Если решается задача оптимизации стационарного режима, объект описывается системой нелинейных конечных уравнений и неравенств. Задача управления решается методами математического программирования.

Однако, учитывая специальный вид математических моделей, описывающих типовые аппараты химической промышленности и структуру связей, характерных для разветвленных химико-технологических схем, задачи управления можно решать различными, иногда сравнительно простыми методами.

Одной из основных проблем, возникающих при управлении системой параллельно работающих агрегатов, является распределение нагрузок. Задача оптимального распределения нагрузок между параллельными агрегатами — это частный случай общей задачи распределения ограниченных ресурсов[5]. Подобная проблема возникает в самых разнообразных областях: в химической промышленности, в энергетике, в экономике. Одна из первых работ, в которых рассматривалась задача оптимального распределения ресурсов, относится к области психологии. Еще в середине XIX века немецким ученым Х. Х. Госсеном были установлены психофизиологические законы распределения ограниченных ресурсов индивидуума на потребление различных материальных благ[6]. Согласно закону Госсена, человек будет испытывать максимальное наслаждение при таком распределении, когда ощущается одинаковый прирост наслаждения на единицу приращения затрат для всех видов материальных благ. В дальнейшем этот универсальный принцип под названием принципа

равенства относительных приростов стал основой распределения нагрузок между электростанциями и отдельными котлами и турбинами в энергетике [7,8].

Этот принцип используется также при решении ряда задач оптимального распределения нагрузок в химической промышленности [9].

Построение системы управления разветвленным технологическим комплексом состоит из двух основных этапов: предварительного исследования объекта и синтеза системы управления. В свою очередь, предварительное исследование объекта состоит из нескольких стадий. Сначала производится анализ структуры технологического комплекса. Затем строится модель комплекса, включающая в себя модели структурных элементов комплекса, модели связей между элементами и систему ограничений. Следующая стадия исследования — выбор критерия оптимизации.

СТРУКТУРА КОМПЛЕКСА

Рассмотрим разветвленный химико-технологический комплекс (рис. 1). Прямоугольники изображают отдельные аппараты или группы аппаратов, линии — материальные или энергетические потоки, входящие и выходящие из этих аппаратов.

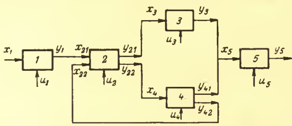


Рис. 1. Разветвленный химико-технологический комплекс:
1, 2, 3, 4, 5 — технологические звенья; x_1, x_{21}, x_{22}, x_3, x_4, x_5 — входы звеньев; y_1, y_{21}, y_{22}, y_3, y_{41}, y_{42}, y_5 — выходы звеньев; u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 — управляющие воздействия.

Аппарат или группу аппаратов, рассматриваемую как единое целое, как элементарную структурную единицу, будем называть технологическим звеном или технологическим участком. Технологические потоки, соединяющие отдельные звенья, назовем связями. Поток, входящий в звено, является его входом, выходящий — выходом. Одна и та же связь может быть входом одного и выходом другого звена.

Ориентированный граф, вершинами которого являются технологические звенья, а дугами — технологические связи, носит название топологической структурной схемы производства или графа производства.

Участок производства не обязательно должен соответствовать одному технологическому аппарату, он может объединять

группу аппаратов и иметь разветвленную топологическую структуру. Очевидно, что один и тот же производственный комплекс может быть изображен по-разному в зависимости от принятого разбиения. Например, при создании структурной схемы завода технологическими звеньями могут быть отдельные цеха; в структурной схеме цеха роль участка играют группы аппаратов или отдельные аппараты — реакторы, теплообменники и т. д. Степень детализации при разбиении определяется сложностью исследуемого комплекса и задачами управления.

На рис. 1 входы технологического звена обозначены через x_{ij}, а выходы — через y_{ij} (здесь i — номер участка, а j — номер потока). В том случае, когда звено имеет единственный вход или выход, индекс j опускается. Вектор независимых управляющих воздействий обозначен через u_i.

Остановимся подробнее на физическом смысле связи. В непрерывном производстве связь соответствует непрерывному материальному или энергетическому потоку и в простейшем случае определяется мощностью этого потока. Примером простейшей связи может служить расход электроэнергии, расход воды и т. д. В этом случае связь x_{ij} является скалярной величиной. Во многих случаях, однако, технологическая связь определяет некоторые дополнительные характеристики потока (температуру, давление, состав и т. п.) и является векторной величиной.

Существуют различные формы представления связи, определяющие ее размерность. Так, например, один и тот же технологический поток теплоносителя в процессе теплообмена может быть охарактеризован либо тремя величинами: мощностью потока, его температурой и теплоемкостью вещества, либо одной величиной, а именно — энтальпией этого потока. Возможность того или иного представления связи зависит от постановки задачи управления. Отсюда видно, что задача составления структурной схемы производства не является такой тривиальной, как могло бы показаться с первого взгляда. Обычно сложный технологический граф является комбинацией различного числа простейших элементарных структур (последовательных, параллельных и охваченных обратной связью).

Рассмотрим подробнее элементарные структурные схемы производства.

Последовательная схема

При последовательной схеме (рис. 2) технологические звенья (участки производства) соединены таким образом, что выход предыдущего является входом одного последующего звена. Если участки пронумерованы по порядку их последовательного соединения, между их входами и выходами существует следующая зависимость:

$$x_1 = x_0 \quad x_i = y_{i-1} \quad y_n = y_0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{I, 1}$$

где x_0 и y_0 — общий вход и выход последовательной цепочки.

Системы последовательно соединенных звеньев часто встречаются в промышленных технологических схемах. Примером может служить блок последовательно соединенных однотипных химических реакторов. Участками производства являются отдельные реакторы, технологическими связями — векторные величины, составляющими которых является нагрузка реакторов и концентрация целевых и побочных продуктов реакции. Управляющими воздействиями могут быть, например, температура, давление и т. п.

Другим примером часто встречающейся последовательной технологической схемы может служить цепочка экстракторов[10, 11], работающих по следующей схеме. Сырье, являющееся смесью

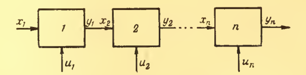


Рис. 2. Последовательная схема:
1 — n — технологические звенья.

целевого и побочного продуктов, поступает в первый по ходу экстрактор и смешивается с растворителем. Растворитель частично отмывает побочный продукт и выводится из системы, а основной поток направляется в следующий экстрактор, где процедура отмывки повторяется. Технологическим звеном является экстрактор со всеми сопутствующими аппаратами: смесителем, отстойником и т. д. Технологическая связь — векторная величина, имеющая две составляющие: нагрузку и концентрацию отмываемого сырья.

Наконец, еще один пример последовательной системы: производство синтетического аммиака из природного газа[12]. Технологическими звеньями являются последовательно соединенные цеха конверсии природного газа, очистки и компрессии конвертированного газа и синтеза аммиака. В этом случае каждое звено состоит из большого числа разнообразных взаимосвязанных аппаратов.

Технологические связи между участками состоят из большого числа составляющих, таких как мощность технологических потоков (нагрузка), содержание примесей в потоках (CO_2, CO, CH_4, инертных газов), температура и давление газовых потоков. К этим примерам мы будем обращаться при рассмотрении методов управления системами последовательно соединенных аппаратов.

Последовательные технологические связи широко представлены в непрерывных химических производствах, так как при

переходе от периодического процесса к непрерывному последовательность технологических операций во времени заменяется последовательностью технологических аппаратов в пространстве.

Параллельная схема

Технологические звенья, составляющие параллельную структуру, имеют объединенные входы и выходы. На рис. 3, как и ранее, общий вход системы обозначен через x_0, общий выход — через y_0.

Общий вход равен сумме входов отдельных звеньев, общий выход — сумме выходов:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad y_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (I, 2)$$

Связи x_0, x_i, y_0, y_i могут быть как скалярными, так и векторными величинами.

Однако, для того чтобы равенства (I, 2) соблюдались, составляющие векторов x_i и y_i необходимо представить в форме, допускающей суммирование. Это означает, что составляющими векторов могут быть такие величины, как мощность, энтальпия (но не температура), содержание компонента смеси в абсолютных единицах (но не в долях общего количества смеси) и т. д.

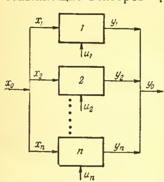


Рис. 3. Параллельная схема: *1—n* — технологические звенья.

Примером параллельной схемы может служить группа параллельно работающих теплообменников; группа насосов, подающих жидкость в один коллектор; группа параллельно работающих реакторов. Параллельные схемы характерны для крупного химического производства и широко распространены в химической промышленности. Это связано, во-первых, с их повышенной надежностью, так как выход из строя одного из аппаратов не нарушает работы всей системы. Во-вторых, параллельные схемы обладают большой гибкостью, позволяющей в одной технологической схеме применять оборудование разной производительности, т. е. в разных последовательных звеньях производства использовать разное число параллельно работающих аппаратов. Такие схемы, называемые коллекторными, позволяют обеспечить непрерывность общего технологического потока в ряде производств, в состав которых входят отдельные агрегаты, работающие по периодической или полупериодической схеме.

Схема с обратной связью

Характерной особенностью системы с обратной связью (рециклом) является то, что часть продукта с выхода последнего звена поступает на вход первого. На рис. 4 изображены системы с обратной связью, охватывающей группы последовательно (*а*) и параллельно (*б*) соединенных аппаратов. Если x_0 —

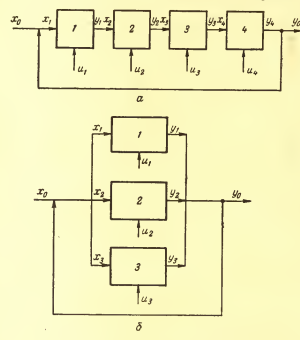


Рис. 4. Схемы с обратной связью:
а — последовательная; *б* — параллельная.

общий вход схемы, а y_0 — ее выход, то уравнение обратной связи для схемы, изображенной на рис. 4, *а*, имеет вид:

$$x_1 = x_0 + \alpha y_n \quad y_0 = y_n(1 - \alpha) \tag{I, 3}$$

а для схемы, изображенной на рис. 4, *б*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 + \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i \quad y_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i (1 - \alpha) \tag{I, 4}$$

Величина α, называемая степенью рециркуляции, определяет часть общего потока, возвращаемую на вход системы

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \tag{I, 5}$$

Если последовательная структурная схема отвечает требованию непрерывности производства, а параллельная —

достижению высокой производительности и надежности, то схема с обратной связью, как правило, отвечает требованию экономичности. Иногда обратные связи, или рециклы, обеспечивают утилизацию тепла, иногда они дают возможность повторно использовать какой-либо продукт, иногда обратная связь обеспечивает более полное использование сырья и увеличение выхода целевого продукта реактора.

На производстве рассмотренные типовые элементарные структурные схемы редко встречаются в чистом виде. Как правило, в реальном производстве последовательные, параллельные и схемы с обратной связью переплетаются в сложные разветвленные сети. В зависимости от задач управления возможны различные подходы к математическому описанию разветвленных схем.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА

После того как построена структурная схема технологического комплекса, необходимо составить его математическую модель. Исходную задачу можно упростить, если расчленить производство на отдельные участки.

Математическое описание комплекса состоит из описаний отдельных участков и связей между ними.

Как было указано ранее, технологическое звено имеет несколько входов x_{ij} и выходов y_{ij}. Кроме того, на технологическое звено поступает управляющее воздействие u_i (i — номер звена, j — номер входа или выхода). Величины x_{ij}, y_{ji} и u_i могут быть векторными или скалярными.

Система уравнений, определяющая зависимость между входами, выходами и управляющими воздействиями звена, называется его математическим описанием. Для i-того звена, имеющего r входов и s выходов, математическое описание задается системой уравнений вида

$$F_{ik}(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}, y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{is}, u_i) = 0 \qquad (I, 6)$$

Создание математического описания участка является одним из наиболее сложных этапов построения системы управления комплексом.

Вид уравнения (I, 6) определяется характером описываемых взаимосвязей в объекте, методом, примененным для построения модели, диапазоном изменения переменных и другими факторами.

По характеру моделируемых закономерностей различаются модели, описывающие переходные процессы в системе (динамические модели объекта), и модели, описывающие установившиеся состояния (статические модели объекта).

В зависимости от использованного метода различают модели типа «черный ящик», модели, основанные на физико-хи-

мических и экономических закономерностях процесса, и смешанные модели.

При построении модели типа «черный ящик» предполагают, что физическая сущность связей между входами и выходами объекта неизвестна. Как правило, для построения таких моделей пользуются статистическими методами корреляционного и регрессионного анализа [13, 14].

При этом динамика участка обычно описывается линейными дифференциальными уравнениями не очень высокого порядка с запаздывающим аргументом, а статика — полиномами (уравнения регрессии). Порядок уравнения регрессии обычно не превышает трех. Коэффициенты регрессионных уравнений, как правило, не имеют наглядной связи с физическими характеристиками объекта.

Модель типа «черный ящик» применяется в тех случаях, когда физическая сущность процессов, происходящих в технологическом звене, практически неизвестна или когда изучаемый участок имеет сложную структуру. К достоинствам такой модели можно отнести ее сравнительную простоту, адекватность конкретному исследуемому объекту и наличие стандартных методов получения. Недостатками модели типа «черный ящик» является отсутствие наглядных связей с физическими характеристиками объекта, невозможность экстраполяции в область, выходящую за пределы экспериментального изменения переменных, и невозможность ее использования для построения моделей подобных участков.

Модель, основанная на анализе физико-химических закономерностей процессов, протекающих в технологическом звене, как следует из ее определения, строится на основании известных законов, определяющих связи между входами и выходами объекта. Этими законами являются балансы вещества и энергии, уравнения гидродинамики, теплопередачи, массопередачи и химической кинетики. Для построения такой модели необходимо располагать большим количеством данных о процессе: знать геометрические размеры аппаратуры, расходы поступающих в аппараты веществ, коэффициенты массо- и теплопередачи, кинетику протекающих реакций. По виду уравнений связи полученная модель может быть достаточно сложной.

Достоинством подобной модели является, во-первых, возможность ее построения до экспериментального исследования конкретного объекта, что дает возможность создать модель проектируемого производства и заранее наметить для него пути оптимального управления. Во-вторых, постоянные коэффициенты модели имеют наглядный физический смысл: это позволяет сознательно упрощать или усложнять модель. Кроме того, такая модель может быть использована для описания других аналогичных объектов.

Однако имеются и существенные недостатки. Стремление учесть все явления, протекающие в процессе, приводит к чрезмерной математической сложности модели. Тем не менее априорное представление о процессе, положенное в основу построенной модели, может не вполне совпадать с реальным ходом процесса, некоторые факторы, например состояние поверхности катализатора, вообще весьма трудно учесть заранее. Поэтому необходима экспериментальная проверка адекватности модели реальному объекту.

Этих недостатков лишена модель смешанного типа, которая строится на основе известных заранее физико-химических закономерностей процесса, однако ряд коэффициентов этой модели определяется экспериментально в ходе ее адаптации к конкретному производственному процессу. Модель смешанного типа по сложности занимает среднее положение между моделью типа «черный ящик» и моделью, основанной только на физико-химических закономерностях. Отсутствие некоторых сведений о химизме процесса и упрощенная структура уравнений компенсируются экспериментально определенными коэффициентами. Необходимая адекватность модели обеспечивается в процессе ее построения. В отличие от 1-го типа модели экспериментально определенные коэффициенты имеют наглядный физический смысл; их можно сравнивать с соответствующими коэффициентами, полученными другими исследователями в других условиях.

По виду уравнения связи (I, 6) модели подразделяются на описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных, обыкновенными дифференциальными уравнениями и конечными уравнениями. Последние могут быть линейными и нелинейными.

В дальнейшем главным образом будут рассматриваться статические модели звеньев.

Линейная модель участка, имеющего r входов и s выходов, представляет собой систему линейных алгебраических уравнений

$$y_{ij} = a_0 + \sum_{k=1}^{r} a_{ijk} x_{ik} + b_{ij} u_i \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{I, 7}$$

Линейная модель обычно основывается на уравнении материального или теплового баланса или получается в результате линейного регрессионного анализа.

Нелинейная модель, полученная регрессионным методом, имеет вид системы полиномов

$$y_{ij} = a_0 + \sum_{k=1}^{r} a_{ijk} x_{ik} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} b_{ijkl} x_{ik} x_{il} + \ldots \tag{I, 8}$$

Более сложный вид имеют модели, полученные при совместном решении уравнений кинетики, теплопередачи, массопере-

дачи (см. гл. IV). Иногда модель участка, имеющего один вход и один выход, задается в виде графика.

Кроме описаний отдельных участков в математическую модель объекта входят уравнения связи, описывающие топологическую структуру производства. Примеры уравнений связи были приведены в начале параграфа при описании типовых производственных структур; в общем случае уравнения связи имеют вид:

$$x_{ij} = y_{kl} \qquad \text{(I, 9)}$$

где i, k — номера звеньев; j, l — номера входов и выходов.

В состав математического описания производства входит также ряд неравенств. Это ограничения, накладываемые условиями реализуемости, безопасности, внешними связями производства.

Ограничения типа неравенства могут ограничивать диапазон изменения входов, выходов, управляющих воздействий

$$x_{ij\,\min} \leqslant x_{ij} \leqslant x_{ij\,\max} \quad u_{i\,\min} \leqslant u_i \leqslant u_{\max} \qquad \text{(I, 10)}$$

или иметь более общий вид:

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, u_1, u_2, \ldots, u_n) \leqslant 0 \qquad \text{(I, 11)}$$

Совокупность математических описаний звеньев, топологических связей и ограничений составляет математическую модель технологического комплекса.

КРИТЕРИЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Одним из наиболее сложных моментов создания системы управления является выбор критерия оптимизации, или функции цели. Наиболее распространенным критерием оптимизации производственного комплекса является его прибыль, определяемая по формуле

$$P = \sum_i q_i y_i - S \qquad \text{(I, 12)}$$

где y_i — производительность производства по целевым продуктам; q_i — цена продуктов; S — затраты производства.

Целью управления является максимизация целевой функции, в данном случае прибыли P.

В других случаях критерием оптимизации может быть себестоимость выпускаемой продукции

$$C = \frac{S}{y} \qquad \text{(I, 13)}$$

Эта форма задания критерия управления особенно удобна, если имеется один главный целевой продукт производства y_1. При

этом стоимость побочных продуктов производства y_p вычитается из затрат S

$$C = \frac{S - \sum_{p} q_p y_p}{y_1} \qquad (I, 14)$$

Целью управления будет достижение минимума себестоимости при заданной производительности.

В задачах оперативного управления в качестве критерия оптимизации часто используют технологическую себестоимость, отличающуюся от полной себестоимости тем, что в числитель выражения (I, 13) вместо общих затрат S подставляют технологические затраты S^*, т. е. затраты на сырье, материалы и энергию. Затраты на рабочую силу, амортизацию оборудования и накладные расходы не зависят от оперативного управления и поэтому не включаются в число технологических затрат S^*.

Иногда критерием управления является производительность предприятия, и оптимальное управление должно обеспечить максимальную производительность при заданных ограниченных ресурсах.

В общем случае критерий управления является функцией входов, выходов и управляющих воздействий

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (I, 15)$$

Зная критерий управления всего комплекса в целом, в ряде случаев можно, используя методы декомпозиции, выделить критерии управления отдельными участками производства. Декомпозиция критерия управления тесно связана с особенностями технологической структуры производства. Примеры декомпозиции критерия будут рассмотрены при анализе управления различными технологическими структурами.

ГЛАВА II

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ РАЗВЕТВЛЕННЫМ КОМПЛЕКСОМ

Задача оптимального управления разветвленным технологическим комплексом в наиболее общем случае формулируется следующим образом. Найти управляющие воздействия $u_1, u_2, \ldots, u_n$, обеспечивающие экстремальное (максимальное или минимальное) значение функции цели

$$\max_{u, y, x} \Phi = \sum_i \varphi_i(x_i, y_i, u_i) \qquad \text{(II, 1)}$$

при условиях, которые определяют:

связь между входами и выходами технологических звеньев

$$y_i = f_i(x_i, u_i) \qquad \text{(II, 2)}$$

топологическую структуру производства

$$y_{ij} = x_{kl} \qquad \text{(II, 3)}$$

технологические ограничения

$$x_{i\,\min} \leqslant x_i \leqslant x_{i\,\max} \quad y_{i\,\min} \leqslant y_i \leqslant y_{i\,\max} \quad u_{i\,\min} \leqslant u_i \leqslant u_{i\,\max} \qquad \text{(II, 4)}$$

где x_{ij} — j-тый вход i-того звена; x_i — совокупность всех входов i-того звена; x — совокупность входов всех звеньев; для u и y смысл индексов тот же.

Задача управления (II. 1—II. 4) имеет высокую размерность, поэтому ее решение может быть весьма сложным и трудоемким. Однако блочная структура системы уравнений (II.2) и функции цели (II. 1) позволяет разбить задачу управления на несколько подзадач меньшей размерности, т. е. осуществить декомпозицию. При этом система управления приобретает иерархическую структуру: на нижнем уровне решаются задачи управления отдельными участками, на верхнем — задача управления всем комплексом в целом (двухуровневая система).

Существуют различные методы декомпозиции многомерных задач управления [1, 2]. Рассмотрим два основные принципа декомпозиции: по «заданиям» и по «ценам».

Декомпозиция по «заданиям»

Разобьем общую задачу управления (II. 1—II. 4) на n частных задач управления участками (задачи нижнего уровня):

$$\max_{u_i} \varphi_i(x_i, y_i, u_i)$$

при

$$y_i = f_i(x_i, u_i) \qquad (II, 5)$$

$$u_{i\,\min} \leqslant u_i \leqslant u_{i\,\max}$$

Задача управления каждым участком решается отдельно. Найдем управляющие воздействия u_i^*, которые обеспечивают экстремум функции цели этого участка при заданных входах и выходах x_i, y_i. Функция цели оптимально управляемого объекта $\varphi_i^*(x_i, y_i) = \varphi_i(x_i, y_i, u_i^*)$ используется на верхнем уровне управления.

На верхнем уровне управления решается задача оптимальной координации: определяются задания x_i и y_i, обеспечивающие максимум функции цели всего комплекса при условии оптимального управления участками

$$\max_{x,\,y} \sum_i \varphi_i^*(x_i, y_i) \qquad (II, 6)$$

при

$$y_{ij} = x_{kl}$$

$$x_{i\,\min} \leqslant x_i \leqslant x_{i\,\max} \quad y_{i\,\min} \leqslant y_i \leqslant y_{i\,\max}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \quad j = 1, 2, \ldots, n_i \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad l = 1, 2, \ldots, n_k$$

Декомпозиция по «ценам»

Принцип декомпозиции по ценам основан на применении метода неопределенных множителей Лагранжа для определения экстремума функции с ограничениями в виде равенств (см. стр. 24). Для нахождения экстремума функции $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условии, что $\psi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0$, необходимо найти экстремум вспомогательной функции Лагранжа

$$F(x, \lambda) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_j \lambda_j \psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (II, 7)$$

где λ_j — неопределенный множитель Лагранжа.

Построим функцию Лагранжа для задачи (II, 1—II, 4)

$$F(x, y, u, \lambda) = \sum_i \varphi_i(x_i, y_i, u_i) + \sum_{ij} \lambda_{ij}(y_{ij} - x_{kl}) \qquad (II, 8)$$

Разобьем функцию на слагаемые, зависящие от переменных, относящихся к отдельным участкам, и решим следующие за-

дачи управления нижнего уровня:

$$\max_{x_i, y_i, u_i}\left[\varphi_i(x_i, y_i, u_i)+\sum_j \lambda_{ij}y_{ij}-\sum_i \lambda_{rs}x_{il}\right] \qquad (II,9)$$

при

$$y_i=f_i(x_i, u_i) \qquad (II,10)$$

$$x_{i\,\min}\leqslant x_i\leqslant x_{i\,\max} \quad y_{i\,\min}\leqslant y_i\leqslant y_{i\,\max} \quad u_{i\,\min}\leqslant u_i\leqslant u_{i\,\max}$$

С точки зрения экономики неопределенные множители Лагранжа λ_{ij} определяют условные цены продуктов, производимых на участке i, а λ_{rs} — цены продуктов, потребляемых на этом участке. В результате решения задачи (II,9) определяются значения связей $x_i(\lambda)$, $y_i(\lambda)$ и функция цели оптимально управляемого участка $\varphi_i^*(\lambda)$ (прибыль участка) при заданных условных ценах на промежуточные продукты.

На верхнем уровне управления определяются значения неопределенных множителей λ, обеспечивающие выполнение условий (II,3). Иными словами, если $x_{kl}(\lambda)$ — это «спрос» на продукт, требующийся участку k, а $y_{ij}(\lambda)$ — «предложение» продукта участком i, то на верхнем уровне назначают такие цены λ, при которых «спрос» был бы равен «предложению». Величины λ_{ij} определяются из системы уравнений

$$y_{ij}(\lambda)=x_{kl}(\lambda) \qquad (II,11)$$

Для решения сложных задач управления разветвленными комплексами двухуровневая система управления оказывается весьма эффективной.

Во-первых, при разбиении задачи управления на два уровня решение одной задачи большой размерности удается заменить решением нескольких задач меньшей размерности. А так как сложность решения задачи резко увеличивается с ростом ее размерности, декомпозиция приводит к уменьшению затрат машинного времени.

Во-вторых, отдельные звенья производства могут, в свою очередь, представлять собой сложные технологические комплексы, управляемые вручную. При этом очень сложно выделить управляющие воздействия в явной форме и построить зависимость (II,3). В то же время зависимость затрат от входов и выходов производства $\varphi_i^*(x_i, y_i)$ достаточно точно можно определить экспериментально-статистическими методами.

В настоящей книге задача управления будет рассматриваться в основном как задача координации, сформулированная уравнением (II,6). При этом будем считать, что на каждом отдельном участке производства осуществляется оптимальное управление. В некоторых сравнительно простых случаях задача управления будет рассматриваться в целом, без разбиения на два уровня.

Задача управления, сформулированная в предыдущем параграфе в виде уравнений (II, 1—II, 4), является типичной задачей математического программирования. Математическое программирование — это сравнительно новый, развивающийся раздел математики, предметом которого является решение задач об отыскании экстремума функции при наличии ограничений. С идеями и методами математического программирования можно ознакомиться по многочисленным статьям и монографиям [15–24].

Приведем краткое изложение основных принципов некоторых методов математического программирования, используемых в дальнейших разделах книги.

Рассматриваемые методы решения задачи управления можно разделить на три группы: прямые методы, с помощью которых осуществляется последовательное приближение к оптимальному управлению; непрямые, с помощью которых осуществляется приближение к необходимым условиям оптимальности, и глобальные методы, с помощью которых проводится направленный или случайный перебор точек, распределенных во всем пространстве допустимых управлений.

К числу прямых методов можно отнести симплекс-метод линейного программирования [20–23], различные варианты градиентного метода [18]. Основной принцип этих методов заключается в последовательном переходе от одного допустимого решения к другому, лучшему. Прямыми методами удобно пользоваться при наличии ограничений; однако они могут привести в точку локального, а не глобального экстремума.

Непрямые методы основаны на предварительном определении условий оптимальности и дальнейшем приближении к ним. К их числу относятся, например, метод определения условного экстремума функции многих переменных, применяемый в классическом анализе [25], и дискретный принцип максимума [28]. Эти методы требуют большой осторожности при постановке задачи и проверки достаточных условий. Непрямые методы не всегда приводят к глобальному экстремуму.

Глобальные методы, к которым относятся метод полного перебора, метод статистических испытаний и метод динамического программирования [29], требуют высокого быстродействия и большого объема памяти вычислительной машины. Зато они приводят к глобальному экстремуму, а наличие ограничений не только не усложняет, но иногда облегчает нахождение решения.

Прямые методы нелинейного программирования

Пусть необходимо определить максимум функции Φ

$$\max \Phi (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (II, 12)$$

при ограничениях

$$f_i (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0 \qquad (II, 13)$$

Градиентные методы поиска экстремума функции многих переменных основаны на том, что в направлении градиента функции $\Phi\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция растет с максимальной скоростью. В начальной точке $x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0$ определяется направление градиента $\bar{r}^0$

$$r_1^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad r_2^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \ \ldots, \ r_n^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \tag{II, 14}$$

Затем осуществляется шаг в пространстве переменных x_1, x_2, ..., x_n в направлении градиента

$$x_i^1 = x_i^0 + r_i^0 \Delta \tag{II, 15}$$

где Δ — шаг итерации, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В новой точке x^1 снова определяется направление градиента $\bar{r}^1$ и снова происходит перемещение на один шаг

$$x_i^2 = x_i^1 + r_i^1 \Delta \tag{II, 16}$$

Шаг итерации может быть постоянным или уменьшаться по мере приближения к экстремуму. При попадании на границу области (II, 13) градиент проектируется на нее, и дальнейшее перемещение осуществляется в направлении проекции градиента на поверхность границы.

Разработано много вариантов градиентного метода, обеспечивающих более быструю сходимость к оптимуму. Можно не определять направление градиента на каждом шаге, а перемещаться вдоль направления $\bar{r}^0$ до тех пор, пока функция Φ не начнет убывать, или до границы области. Этот вариант носит название метода наискорейшего спуска. Перемещение в пространстве переменных x_1, x_2, ..., x_n может происходить не строго в направлении градиента, а вдоль любого допустимого направления, составляющего с градиентом острый угол (метод Гаусса — Зейделя, метод возможных направлений Зойтендейка). Сходимость на поверхностях сложных конфигураций (с хребтами, оврагами и седловыми точками) обеспечивается с помощью специальных алгоритмов [18].

Пусть целевая функция и ограничения линейны

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{II, 17}$$

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i > 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{II, 18}$$

Система (II, 17), (II, 18) формулирует задачу линейного программирования. Экстремум функции (II, 17) достигается на

границе области ограничений, в одной из вершин n-мерного многогранника, описываемого системой неравенств (II, 18).

Симплексный метод отыскания экстремума функции (II, 17), разработанный Данцигом[20], основан на последовательном переборе вершин многогранника ограничений таким образом, чтобы в каждой следующей вершине значение целевой функции было больше, чем в предыдущей.

Многие задачи нелинейного программирования решаются путем линейной аппроксимации этих задач, сведения их к задаче линейного программирования и использования симплекс-метода.

Непрямые методы нелинейного программирования

Непрямые методы, как было сказано выше, основаны на определении условий оптимальности. В первую очередь к ним относится метод неопределенных множителей Лагранжа — классический метод отыскания условного экстремума функции многих переменных при наличии ограничений, заданных равенствами[25].

Пусть необходимо определить максимум выпуклой функции n переменных

$$\max \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{(II, 19)}$$

при

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m \quad m < n \qquad \text{(II, 20)}$$

Функция $\Phi(x)$ называется выпуклой в области M, если для любых двух точек x_1 и x_2 из M справедливо, что

$$\Phi[\eta x_1 + (1-\eta)x_2] \geqslant \eta\Phi(x_1) + (1-\eta)\Phi(x_2) \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1 \qquad \text{(II, 21)}$$

y $\Phi(x)$ 0 x

Рис. 5. Выпуклая функция.

(рис. 5). Для решения задачи (II, 19), (II, 20) строят вспомогательную функцию

$$F = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{(II, 22)}$$

Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обеспечивающие абсолютный максимум функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, соответствуют условному экстремуму функции $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Дифференцируя F, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad j = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \qquad \text{(II, 23)}$$

Решая систему уравнений (II, 22), находят стационарную точку x^*.

Если есть ограничения в виде неравенств, задача определения экстремума функции многих переменных усложняется. Экстремальное значение функции цели может достигаться не только внутри области, заданной ограничениями, но и на ее границе. В этом случае условия существования экстремума определяются следующим образом (теорема Куна — Таккера)[26].

Пусть $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — выпуклые функции n переменных. Для определения максимума функции $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{II, 24}$$

$$x_i \geqslant 0 \tag{II, 25}$$

необходимо и достаточно определить седловую точку вспомогательной функции F

$$\min_{\lambda} \max_{x} F = \min_{\lambda} \max_{x} \left[\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \tag{II, 26}$$

при

$$x_i \geqslant 0 \quad \lambda_j \geqslant 0$$

Если $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — дифференцируемые функции, то условия (II, 26) эквивалентны следующим локальным условиям:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \leqslant 0 \quad x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} \geqslant 0 \quad \lambda_j \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0 \quad x_i \geqslant 0 \quad \lambda_j \geqslant 0 \tag{II, 27}$$

Подставляя значение F из (II, 26) и (II, 27), можно свести условия Куна — Таккера к следующей системе уравнений и неравенств:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i = 0 \tag{II, 28}$$

$$f_j - u_j = 0 \quad \lambda_j u_j = 0 \quad x_i v_i = 0 \tag{II, 29}$$

$$x_i \geqslant 0 \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad v_i \geqslant 0 \quad u_i \geqslant 0 \tag{II, 30}$$

Соотношения (II, 29) носят название условий дополняющей нежесткости.

Если в ограничениях (II, 24) знак $\geqslant$ заменить знаком равенства, а область изменения x_i не ограничивать, то дополнительные переменные u_j и v_j будут равны нулю и система уравнений (II, 28—II, 30) сведется к системе уравнений Лагранжа (II, 22).

К непрямым методам оптимизации можно отнести также дискретный принцип максимума — метод, специально разработанный для решения многошаговых задач оптимизации и являющийся обобщением принципа максимума

Л. С. Понтрягина[27] на дискретные процессы. Подробное изложение метода и его приложений к задачам оптимизации содержится в монографии Фана и Ваня[28].

Динамическое программирование

Метод динамического программирования, разработанный Р. Беллманом, является весьма эффективным методом оптимизации многостадийных процессов. Идея метода заключается в замене многомерной задачи оптимизации последовательностью задач меньшей размерности. Метод разбиения многомерной задачи на подзадачи зависит от вида функции цели и ограничений.

Краеугольным камнем метода является принцип оптимальности, который заключается в том, что «каково бы ни было первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения»[29].

Предположим, что общую задачу оптимизации удается разбить на последовательные стадии. Пусть переход от одной стадии к другой описывается уравнением связи

$$x_i = f_i(x_{i-1}, u_i) \qquad (II, 31)$$

где x_i — состояние системы; u_i — управляющее воздействие.

Необходимо найти максимум функции цели

$$\max_u \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \max \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_{i-1}, u_i) \qquad (II, 32)$$

Введем в рассмотрение функцию $R_k(x_k)$ и определим ее как максимум функции цели для процесса, который начинается с k-того шага и входом которого является величина x_{k-1}

$$R_k(x_{k-1}) = \max_{u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n} \sum_{i=k}^{n} \varphi_i(x_{i-1}, u_i) \qquad (II, 33)$$

Основная идея метода динамического программирования заключается в том, что можно последовательно выразить R_{k-1} через R_k

$$R_{k-1}(x_{k-2}) = \max_{u_{k-1}} S_{k-1}(x_{k-2}, u_{k-1}) = \max_{u_{k-1}} [\varphi_{k-1}(x_{k-2}, u_{k-1}) + R_k(x_{k-1})] \qquad (II, 34)$$

при

$$x_{k-1} = f_{k-1}(x_{k-2}, u_{k-1}) \qquad (II, 35)$$

Последовательно применим формулу (II, 34), начиная с конца процесса, от $k = n$ до $k = 1$. Значение R_n, полученное на первом этапе оптимизации, используем на втором этапе и т. д.

При этом на каждом этапе оптимизации ищется максимум функции только по одной переменной u_{k-1} при одном ограничении (II,35).

Задача динамического программирования может решаться и для функций цели более сложного вида, чем функция (II,32). Однако во всех случаях максимум функции $S_{k-1}(x_{k-2}, u_{k-1})$ может быть найден сравнительно легко, так как эта функция зависит от одного управляющего параметра. Конечно, величина u_{k-1} может быть вектором, но и тогда размерность задачи оптимизации на каждом этапе в n раз меньше размерности исходной задачи. Даже в том случае, когда функция $S_{k-1}(x_{k-2}, u_{k-1})$ имеют сложную форму и для отыскания экстремума необходимо перебрать все ее возможные значения, решение задачи остается в пределах возможностей цифровых вычислительных машин.

Методы решения задач вариационного исчисления

Во многих задачах оптимизации независимыми переменными являются не числа, а функции. При этом цель оптимизации заключается в том, чтобы отыскать такие неизвестные функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, которые обеспечивают максимум некоторой скалярной величины I, зависящей от этих функций и от их производных.

Величина $I[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ носит название функционала и обычно записывается в виде интегральной зависимости. Для случая одной переменной функционал I может быть представлен в виде

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x', t)\, dt \tag{II,36}$$

где $F(x, x', t)$ — заданная функция; $x(t)$ — искомая функция независимой переменной t.

Для того чтобы найти функцию $x(t)$, надо решить специальное дифференциальное уравнение (уравнение Эйлера), которое получают из подынтегральной функции функционала I [97]

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = 0 \tag{II,37}$$

Так как уравнение Эйлера — это дифференциальное уравнение второго порядка, его решение содержит две произвольные постоянные, значения которых определяются из заданных граничных условий

$$x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1 \tag{II,38}$$

Вариационная задача, в которой заданы граничные условия (II,38), носит название задачи с закрепленными концами.

Если же один или оба конца функции $x(t)$ не закреплены, т. е. значение искомой функции в точках t_0, t_1 неизвестно, то

произвольные постоянные определяются из так называемых условий трансверсальности.

Для задачи с незакрепленным левым концом (в точке t_0) условие трансверсальности имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x'}[t_0,\ x(t_0),\ x'(t_0)] = 0 \qquad (II, 39)$$

а для задачи с незакрепленным правым концом

$$\frac{\partial F}{\partial x'}[t_1,\ x(t_1),\ x'(t_1)] = 0 \qquad (II, 40)$$

В вариационном исчислении, так же как в обычном анализе, рассматриваются задачи отыскания экстремума функционала при наличии ограничений. Если ограничения записаны в виде

$$\varphi(t,\ x,\ x') = 0 \qquad (II, 41)$$

то для отыскания условного экстремума функционала (II, 36) при ограничении (II, 41) надо решить уравнение Эйлера для функции Лагранжа

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial x'}\right) = 0 \qquad (II, 42)$$

где

$$F^* = F + \lambda(t)\,\varphi(t,\ x,\ x') \qquad (II, 43)$$

Неопределенный множитель Лагранжа $\lambda(t)$ в этом случае представляет собой функцию независимой переменной t.

Если функционал I зависит от нескольких неизвестных функций $x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_n',\ t\right) dt \qquad (II, 44)$$

то для отыскания экстремума функционала необходимо решить систему уравнений Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i'}\right) = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (II, 45)$$

Условия трансверсальности и уравнения Эйлера для отыскания условного экстремума функционала также могут быть обобщены на случай нескольких неизвестных функций.

При решении вариационных задач часто возникают трудности, связанные с тем, что на переменные наложены ограничения в виде неравенств, или с тем, что отыскиваемые функции $x(t)$ не являются непрерывными. Для решения таких задач может применяться метод, разработанный Л. С. Понтрягиным[27] и известный под названием принципа максимума.

Обычно задачи, решаемые с применением принципа максимума, формулируются в следующем виде.

Найти управляющие воздействия $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$, обеспечивающие максимум функционала

$$I(u, x) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, \ldots, x_m, u_1, u_2, \ldots, u_n, t)\, dt \qquad (II, 46)$$

для объекта, описываемого дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, m \quad (II, 47)$$

Граничные условия известны

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \; x_i(t_1) = x_{i1}$$

Для решения задачи вводят в рассмотрение функцию H, зависящую от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, u_1, u_2, \ldots, u_n$ и некоторых вспомогательных переменных $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^{m} \psi_i f_i(x, u) \qquad (II, 48)$$

С помощью этой функции записывают следующую систему уравнений для вспомогательных переменных:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x_i} \qquad (II, 49)$$

$$\psi_0 = \text{const} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Для отыскания оптимального решения необходимо найти такую константу $\psi_0 \leqslant 0$ и такие решения системы уравнений (II, 49), что для любого момента t функция H достигает своего максимального значения, равного нулю

$$H = \max_u H(\psi, x, u) \equiv 0 \qquad (II, 50)$$

Принцип максимума может быть использован для решения широкого круга задач оптимального управления.

ГЛАВА III

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАЗВЕТВЛЕННЫМИ КОМПЛЕКСАМИ

Рассмотрим теперь, как будет решаться задача управления для сложных технологических комплексов различной структуры. В этой главе будут подробно описаны методы управления параллельно работающими агрегатами и в несколько более краткой форме изложены принципы управления системами последовательно соединенных аппаратов и системами, охваченными обратной связью.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ АГРЕГАТАМИ

Системы параллельно соединенных агрегатов, иногда называемые также коллекторными системами, широко распространены в химической промышленности. Причиной этого является повышенная надежность коллекторных систем (выход из строя одного из аппаратов не нарушает работы всей системы) и их большая гибкость (при работе на коллектор в одной технологической схеме можно использовать оборудование разной производительности, объединяя на отдельных участках производства различное число параллельно работающих аппаратов). Наконец, для ряда производств, в составе которых имеются участки периодической или полупериодической работы, коллекторная схема позволяет обеспечить непрерывность общего технологического потока.

Примеры систем, состоящих из параллельно соединенных агрегатов, можно найти в любой отрасли химической промышленности. Так, например, производство синтетического аммиака состоит из пяти последовательно соединенных цехов, в каждом из которых имеется от 2 до 15 однотипных агрегатов [30, 31], работающих по параллельной схеме; в контактном отделении производства слабой азотной кислоты параллельно работает до 15 агрегатов [31]; в производстве синтетического каучука аппараты дегидрирования объединены в группы, состоящие из нескольких (от 3 до 24) параллельных агрегатов [32], и т. д.

Общая производительность системы параллельных агрегатов, как правило, задается верхней иерархической ступенью си-

стемы оперативного управления. Эта производительность обычно лимитируется пропускной способностью «узкого места», т. е. участка с наименьшим запасом производственной мощности. «Узким местом» может быть также сырьевая база или потребитель.

Задача оптимального распределения нагрузок между параллельными агрегатами была одной из первых поставленных и практически решенных задач координации потоков в разветвленных системах. Первые работы по распределению нагрузок между электрическими генераторами относятся к 30-м годам [33, 34]. В настоящее время разработано большое количество вычислительных устройств для оптимального распределения, описание которых будет приведено в гл. VII.

Остановимся подробнее на методах и алгоритмах решения задачи распределения нагрузок между параллельными агрегатами.

Постановка задачи распределения нагрузок

Рассмотрим систему из n параллельно работающих агрегатов (рис. 6). Между входом x_i и выходом y_i каждого агрегата существует зависимость

$$y_i = \varphi_i(x_i) \quad \text{или} \quad x_i = \psi_i(y_i) \qquad \text{(III, 1)}$$

Топологические связи в системе определяются равенствами

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = y_0 \qquad \text{(III, 2)}$$

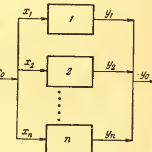


Рис. 6. Система параллельно соединенных аппаратов.

Постановка задачи распределения зависит от положения системы параллельно работающих агрегатов по отношению к «узкому месту» производства. Если «узкое место» производства расположено до рассматриваемой системы по ходу технологического процесса, то величина входа системы ограничена производительностью «узкого места». В этом случае цель оптимального распределения нагрузок заключается в том, чтобы обеспечить максимальную производительность системы при заданной входной нагрузке. В том случае, когда «узкое место» расположено после рассматриваемой системы по ходу процесса, величина выхода ограничена. Цель оптимального распределения заключается при этом в том, чтобы достичь минимальных затрат, зависящих от входных величин, при заданном выходе системы.

Считаем, что каждый агрегат в отдельности работает оптимально, т. е. известны зависимости

$$x_i = \psi_i(y_i) = \min_{u_i} \psi_i(y_i, u_i)$$

или

$$y_i = \varphi_i(x_i) = \max_{u_i} \varphi_i(x_i, u_i)$$

Таким образом, возможны две постановки задачи распределения нагрузок между агрегатами:

1. Найти $y_1, y_2, \ldots, y_n$, минимизирующие функцию

$$\min x = \min \sum_{i=1}^{n} \psi_i(y_i) \tag{III, 3}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = y_0$$

$$m_i \leqslant y_i \leqslant M_i$$

2. Найти $x_1, x_2, \ldots, x_n$, максимизирующие функцию

$$\max y = \max \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \tag{III, 4}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$$

$$m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$$

Необходимо отметить, что величины x_i и y_i могут быть как скалярными, так и векторными. В главе I было отмечено, что составляющие векторов x_i и y_i должны быть аддитивными величинами.

Легко показать, что решение задачи в постановке 1 и 2 приводит к одним и тем же результатам. Задачу распределения будем рассматривать в постановке 2.

Метод решения задачи зависит от вида характеристик агрегатов $\varphi_i(x_i)$.

Рассмотрим решение задачи распределения для характеристик различного вида.

Линейная характеристика

Пусть зависимость производительности от нагрузки определяется линейным уравнением

$$y_i = a_i + b_i x_i \tag{III, 5}$$

Тогда задача распределения формулируется так. Найти x_1, x_2, ..., x_n, максимизирующие линейную форму

$$\max y = \max \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i x_i) \qquad \text{(III, 6)}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$$

$$m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$$

Рассматриваемая задача может быть решена методами линейного программирования, однако простота структуры системы позволяет решить ее следующим образом. Присвоим агрегатам номера в порядке возрастания наклона характеристик

$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n \qquad \text{(III, 7)}$$

Распределим нагрузки между агрегатами в следующем порядке:

$$x_1 = m_1, \quad x_2 = m_2, \ldots, x_{j-1} = m_{j-1} \qquad \text{(III, 8)}$$

$$x_j = x_0 - \sum_{i=1}^{j-1} m_i - \sum_{i=j+1}^{n} M_i, \quad x_{j+1} = M_{j+1}, \ldots, x_n = M_n$$

Покажем, что это распределение является оптимальным. Действительно, легко показать, что $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$. Увеличим нагрузку агрегата $x_l (l < j)$ на Δx, а нагрузку агрегата $x_k (k > j)$ уменьшим на такую же величину. При этом производительность изменится на величину

$$\Delta y = (b_l - b_k) \Delta x$$

Но так как $b_l < b_k$, то $\Delta y < 0$, т. е. производительность уменьшится.

Таким образом, оптимальное распределение нагрузок между агрегатами с линейными характеристиками определяется следующим простым правилом: для оптимального распределения необходимо максимально загружать агрегаты, наклон характеристик которых велик, и снижать нагрузку на агрегатах, наклон характеристик которых мал.

На рис. 7 показано оптимальное распределение нагрузок между тремя агрегатами с линейными характеристиками. На рис. 7, *а* приведены характеристики агрегатов, на рис. 7, *б* и 7, *в* — изменение суммарной производительности и нагрузок x_1, x_2, x_3 в зависимости от общей загрузки системы x_0. При увеличении общей нагрузки системы в первую очередь загружают третий аппарат, наклон характеристики которого наибольший.

Затем производится загрузка аппаратов в порядке уменьшения наклона характеристик: сначала второго, а затем первого. Отметим следующий немаловажный факт. Как было показано, при распределении нагрузок имеет значение не абсолютная величина производительности агрегата и не удельная производительность (к. п. д.), а наклон характеристики, т. е. производная производительности по нагрузке. Часто осуществляемое на практике распределение нагрузок по принципу — «бóльшая нагрузка — агрегату с бóльшим к.п.д.» может привести к ошибочным выводам.

На рис. 8 показаны характеристики агрегатов

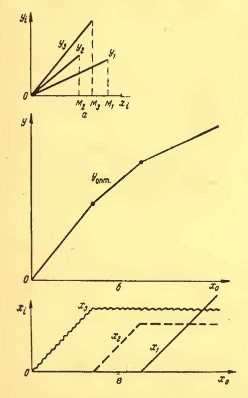


Рис. 7. Распределение нагрузок между агрегатами с линейными характеристиками: *а* — характеристики агрегатов; *б* — производительность при оптимальном распределении; *в* — оптимальные нагрузки: ——— первого агрегата; — — — второго агрегата; ∿∿∿ третьего агрегата.

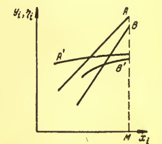


Рис. 8. Влияние наклона характеристик на распределение нагрузок.

A и B, а также зависимости к. п. д. этих двух агрегатов $\eta_i = y_i/x_i$ от нагрузки (кривые A' и B'). Хотя абсолютное значение производительности и к. п. д. агрегата A во всем диапазоне нагрузок больше, чем для агрегата B, бóльшую нагрузку необходимо дать на агрегат B, вследствие того, что наклон его характеристики больше.

Практически общая нагрузка системы, как правило, не намного меньше максимально допустимой, поэтому при оптимальном распределении нагрузок между агрегатами с линейной ха-

рактеристикой все агрегаты нагружают до максимального предела; исключение составляет один агрегат, наклон характеристики которого минимален.

Выпуклая характеристика

Выпуклая кусочно-линейная характеристика

Пусть зависимость производительности от нагрузки может быть представлена в виде кусочно-линейной выпуклой функции (рис. 9)

$$y_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij}\Delta_{ij}\sigma_{ij} + \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij}(x_i - x_{i,\,j-1})\,\gamma_{ij} \qquad \text{(III, 9)}$$

где

$$x_{i0} = 0$$

$$x_{ij} = x_{i,\,j-1} + \Delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x_i \leqslant x_{ij} \\ 1 & \text{при} \quad x_i > x_{ij} \end{cases}$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x_{i,\,j-1} > x_i > x_{ij} \\ 1 & \text{при} \quad x_{i,\,j-1} \leqslant x_i \leqslant x_{ij} \end{cases}$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k_i$$

Здесь x_{ij} — точки перелома кусочно-линейной функции; β_{ij} — наклоны линейных участков характеристики.

В силу выпуклости функции y_i

$$\beta_{i1} \geqslant \beta_{i2} \geqslant \ldots \geqslant \beta_{ik_i} \qquad \text{(III, 10)}$$

Рассматриваемая задача является задачей выпуклого линейного программирования. Для ее решения систему равенств (III, 9) можно заменить системой неравенств, ограничивающих выпуклую область, очерченную кусочно-линейными характеристиками агрегатов. В результате получим следующую задачу линейного программирования:

Рис. 9. Кусочно-линейная характеристика.

найти $x_1,\ x_2 \ldots, x_n$, обеспечивающие максимум функции цели

$$\max y = \max \sum_{i=1}^{n} y_i$$

при

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$y_i \leqslant \alpha_i + \beta_{i1} x_i$$

$$y_i \leqslant \alpha_i + \beta_{i1}\Delta_{i1} + \beta_{i2}(x_i - x_{i1}) \qquad \text{(III, 11)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_i \leqslant \alpha_i + \sum_{j=1}^{k_i-1} \beta_{ij}\Delta_{ij} + \beta_{ik_i}\left(x_i - x_{i,\,k_i-1}\right)$$

$$m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k_i$$

Для решения задачи можно использовать симплекс-метод.

Так, например, в работе [35] метод линейного программирования применен для решения задачи распределения сырья между технологическими установками нефтеперерабатывающего завода, имеющими кусочно-линейные характеристики. Оптимальное распределение должно обеспечить максимальную стоимость готовой продукции при условии, что выход целевых продуктов не будет меньше заданного.

Задача решается двойственным симплекс-методом с последующим применением метода Гомори [23] для получения целочисленного решения.

Однако как и в случае линейных характеристик, решение задачи линейного программирования существенно упрощается. Можно предложить простой алгоритм распределения, сводящийся к следующей последовательности операций:

1. Пронумеруем все линейные отрезки характеристик агрегатов в порядке возрастания наклона этих характеристик так, чтобы

$$\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_3 \leqslant \ldots \beta_k \qquad k = \sum_i k_i \qquad \text{(III, 12)}$$

2. Предположим, что нагрузка всех агрегатов максимальна; тогда общая нагрузка системы будет больше заданной

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i > x_0 \qquad \text{(III, 13)}$$

3. Нагрузку агрегата, в характеристике которого имеется отрезок с наименьшим наклоном β_1, будем снижать до величины, соответствующей точке перелома характеристики.

4. Если отрезок характеристики со следующим по порядку наклоном β_2 принадлежит этому же агрегату, то продолжаем снижать его нагрузку; если же отрезок характеристики с наклоном β_2 принадлежит другому агрегату, то снижаем его нагрузку до точки перелома характеристики.

5. Продолжаем процесс до тех пор, пока не выполнится равенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \quad \text{(III, 14)}$$

При этом очевидно, что величины нагрузок всех агрегатов за исключением одного будут соответствовать точкам перелома их характеристик. Оптимальность этого распределения легко доказывается по аналогии со случаем линейных характеристик.

На рис. 10 изображен график распределения нагрузки между тремя агрегатами, имеющими выпуклые кусочно-линейные характеристики.

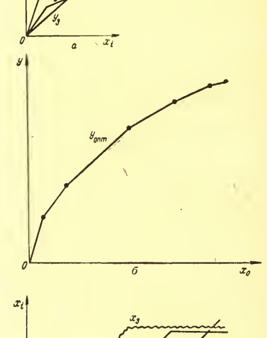


Рис. 10. Распределение нагрузок между агрегатами с выпуклыми кусочно-линейными характеристиками:

а — характеристики агрегатов; *б* — производительность при оптимальном распределении; *в* — оптимальные нагрузки: ——— первого агрегата; – – – второго агрегата; ∿∿∿ третьего агрегата.

Выпуклая непрерывная характеристика

Как будет показано в гл. IV, характеристики многих аппаратов химической промышленности, имеют вид непрерывных выпуклых кривых, поэтому решение задачи распределения при данном виде характеристик представляет особенно большой интерес.

Пусть $\varphi_i(x_i)$ — непрерывная дифференцируемая выпуклая функция.

Необходимо найти распределение $x_1, x_2, \ldots, x_n$, максимизирующее функцию цели

$$\max y = \max \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \qquad \text{(III, 15)}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Вначале рассмотрим задачу распределения нагрузок между двумя агрегатами ($n = 2$): x_1 — нагрузка первого агрегата; $(x_0 - x_1)$ — нагрузка второго. Общая производительность

$$y = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_0 - x_1) \qquad \text{(III, 16)}$$

Так как $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_0 - x_1)$ — выпуклые функции, то и сумма их (рис. 11) — выпуклая функция, максимум которой можно найти из уравнения

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1) - \frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_0 - x_1) = 0 \qquad \text{(III, 17)}$$

Как видно из (III, 17), при оптимальном распределении производные характеристик по нагрузке для первого и второго агрегатов одинаковы.

При числе агрегатов $n > 2$ для решения задачи распределения можно воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа. Для определения максимума выпуклой функции при ограничении (III, 15) необходимо найти абсолютный максимум вспомогательной функции Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - x_0\right) \qquad \text{(III, 18)}$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Рис. 11. Распределение нагрузок между агрегатами с выпуклыми характеристиками:
а — характеристики агрегатов; *б* — оптимальное распределение нагрузок.

Дифференцируя по x_i и λ и приравнивая производные нулю, получаем

$$\frac{d\varphi_i}{dx_i} = \lambda \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \qquad i = 1, 2, \ldots n \qquad \text{(III, 19)}$$

или, исключая λ

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1} = \frac{d\varphi_2}{dx_2} = \ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_n} \qquad \text{(III, 20)}$$

Стационарную точку $x^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ находят путем решения системы уравнений (III, 19). Достаточным условием максимума является отрицательная знакоопределенность второго дифференциала функции

$$d^2F = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2\varphi_i}{dx_i^2} dx_i^2 \leqslant 0 \qquad \text{(III, 21)}$$

В силу выпуклости функций $\varphi_i(x_i)$ вторые производные отрицательны $d^2\varphi_i/dx_i^2 < 0$ и условие (III, 21) всегда соблюдается.

Вогнутый характер зависимости затрат от выходной нагрузки (и выпуклый — производительности от входной нагрузки) встречается во многих процессах. Чем больше полезный результат этих процессов, тем больше относительных усилий надо приложить для его достижения. Как будет показано в следующих главах, такого рода зависимости характерны для ряда процессов и аппаратов химической технологии. Известно, что характеристики энергетических агрегатов — котлов, турбин и даже целых электростанций тоже имеют выпуклую форму. Основу распределения нагрузок всех этих объектов составляет система уравнений (III, 20).

Первый пример решения задачи распределения нагрузок между параллельными агрегатами относится не к области промышленной технологии, а к психофизиологии. В 1854 г. немецким ученым Х. Х. Госсеном были установлены важные психофизиологические законы [6]. Первый закон Госсена гласит: по мере удовлетворения потребности в данном виде материальных благ прирост наслаждения от вкушения этих благ падает.

Если $\varphi(x)$ — наслаждение, ощущаемое человеком от вкушения какого-то блага в количестве x, то, согласно первому закону Госсена

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} < 0$$

Далее Госсен рассматривает задачу о максимизации наслаждения, получаемого человеком при потреблении благ n разных видов. Предполагается, что ресурсы человека ограничены.

Это обычная задача распределения ресурсов

$$\max \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \qquad \text{(III, 22)}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = r$$

Как было показано ранее, условие оптимального распределения

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1} = \frac{d\varphi_2}{dx_2} = \ldots = \frac{d\varphi_n}{dx_n} \qquad \text{(III, 20)}$$

Это утверждение является вторым законом Госсена: при невозможности удовлетворить все потребности полностью их удовлетворение необходимо ограничить на том уровне, при котором ощущается одинаковый прирост наслаждения от каждого вида используемых материальных благ.

Как видим, система уравнений (III. 20) имеет особое значение для задач распределения нагрузок. Поэтому в следующем разделе остановимся подробнее на методах решения этой системы.

При наличии ограничений вида неравенств

$$m_i \leqslant x_i \leqslant M_i \qquad \text{(III, 23)}$$

наибольшее значение функции цели может достигаться не в стационарной точке x^*, а на границе области существования x, т. е. при минимальной или максимальной нагрузке агрегатов.

Согласно теореме Куна — Таккера[26], максимум выпуклой функции $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)$ при ограничениях вида (III,23) находится в седловой точке вспомогательной функции

$$\min_{\lambda, \mu, \eta} \max_{x} \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - x_0 \right) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x_i - m_i) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i (M_i - x_i) \right] \qquad \text{(III, 24)}$$

Седловая точка функции (III, 24) x^* может быть определена из следующей системы уравнений и неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\varphi_i}{dx_i} = \lambda + \mu_i + \eta_i \\ M_i - x_i \geqslant 0 \\ x_i - m_i \geqslant 0 \\ (M_i - x_i)\,\mu_i = 0 \\ (x_i - m_i)\,\eta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \qquad i = 1,\, 2, \ldots,\, n \end{array} \right. \qquad \text{(III, 25)}$$

Если x_i^* находится внутри области (III,23), дополнительные переменные μ_i и η_i равны нулю и система уравнений (III,25) превращается в систему (III, 19).

Практически решение системы уравнений Куна — Таккера обычно сводится к определению экстремума функции цели при всех возможных сочетаниях границ и выбору наибольшего из них. Поэтому при распределении нагрузок обычно решают систему уравнений Лагранжа (III, 19). Если при этом оптимальные нагрузки какого-либо агрегата окажутся больше или

меньше допустимой нагрузки, например $x_j > M_j$, то для этого агрегата принимают нагрузку $x_j^* = M_j$ и решают задачу распределения нагрузки $x_0 - M_j$ для остальных $n-1$ агрегатов. Если и при этом условии нагрузка какого-либо агрегата выходит за допустимые пределы, например $x_k > M_k$, то для этого агрегата принимают нагрузку $x_k^* = M_k$ и снова решают задачу распределения нагрузки $x_0 - M_j - M_k$ для $n-2$ агрегатов и т. д.

Когда характеристики агрегатов одинаковы

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2) = \ldots = \varphi_n(x_n) \quad \text{(III, 26)}$$

решение системы уравнений имеет вид:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n \quad \text{(III, 27)}$$

т. е. оптимальным окажется равномерное распределение нагрузок.

Необходимо помнить, что применение принципа равенства производных без проверки выпуклости характеристик может привести к существенным ошибкам в распределении. Так, например, в работе Джонсона и др.[36] решается задача распределения нагрузок между двумя ректификационными колоннами с целью минимизации затрат тепла. Авторы утверждают, что распределение нагрузок надо производить по принципу равенства производных затрат по нагрузке. Однако анализ зависимостей затрат от нагрузки, приведенных в той же статье, показывает, что при этом потребуются не минимальные, а максимальные затраты тепла. Для правильного решения задачи, как будет показано ниже, необходимо увеличить нагрузку одной из колонн до максимально возможной величины, а нагрузку другой колонны снизить.

Методы решения системы уравнений оптимального распределения

Численные методы

Воспользуемся методом последовательных приближений. Разрешим уравнения $d\varphi_i/dx_i = \lambda$ относительно x_i

$$x_i = \psi_i(\lambda) \quad \text{(III, 28)}$$

Задаваясь произвольным $\lambda = \lambda_0$, определим нагрузки

$$x_i^0 = \psi_i(\lambda_0) \quad \text{(III, 29)}$$

Если сумма нагрузок не равна заданной

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^0 - x_0 \neq 0 \quad \text{(III, 30)}$$

задаемся новым значением $\lambda = \lambda_1$ и т. д. до тех пор, пока равенство не будет выполняться с заданной точностью ε.

Достаточно часто характеристики агрегатов, полученные в результате экспериментального изучения объекта, хорошо

аппроксимируются полиномами второй степени или экспоненциальными кривыми

$$\begin{aligned} y_i &= a_i + b_i x_i - c_i x_i^2 \\ y_i &= a_i - b_i e^{-c_i x_i} \end{aligned} \qquad \text{(III, 31)}$$

В этом случае может быть получено аналитическое решение задачи распределения. Для характеристики, аппроксимированной полиномами второго порядка, система нелинейных уравнений (III, 19) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx_i} = b_i - 2c_i x_i = \lambda \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_0 \end{cases} \qquad \text{(III, 32)}$$

Решая эту линейную систему уравнений, определяем оптимальное распределение нагрузок

$$x_i = \frac{x_0 - 0{,}5 \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{b_j}{c_j}}{c_i \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{c_j}} + \frac{b_i}{2c_i} \qquad \text{(III, 33)}$$

Для характеристик, аппроксимированных экспонентой, система нелинейных уравнений (III, 19) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx_i} = b_i c_i e^{-c_i x_i} = \lambda \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad \text{(III, 34)}$$

После логарифмирования первого уравнения системы (III, 34) получаем линейную систему уравнений

$$\begin{cases} \ln \lambda = \ln b_i c_i - c_i x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad \text{(III, 35)}$$

имеющую решение

$$x_i = \frac{x_0 - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\ln (b_j c_j)}{c_j}}{c_i \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{c_j}} + \frac{\ln (b_i c_i)}{c_i} \qquad \text{(III, 36)}$$

Графический метод

В том случае, когда характеристики агрегатов представлены в виде графиков, для решения системы уравнений может быть использован графический метод[8] (рис. 12). Вверху рисунка изображены зависимости производительности от нагрузки $\varphi_i(x_i)$, под ними — их производные $\frac{d\varphi_i}{dx_i}(x_i) = \beta_i(x_i)$. Для выпуклых функций зависимости $\beta_i(x_i)$ монотонно убывают.

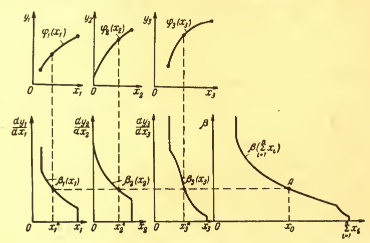


Рис. 12. Графическое решение задачи распределения нагрузок (выпуклые характеристики).

Если необходимо учесть ограничения типа (III, 23), зависимости $\beta_i(x_i)$ надо доопределить следующим образом:

$$\beta_i = \frac{d\varphi_i}{dx_i} \quad \text{при} \quad m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$$

$$\frac{d\varphi_i}{dx_i}(m_i) \leqslant \beta_i \leqslant \infty \quad \text{при} \quad x_i = m_i \qquad \text{(III, 37)}$$

$$0 \leqslant \beta_i \leqslant \frac{d\varphi_i}{dx_i}(M_i) \quad \text{при} \quad x_i = M_i$$

В нижнем правом углу рис. 12 построена суммарная зависимость $\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$. Метод ее построения ясен из рисунка: на оси ординат откладывается значение β, на оси абсцисс — сумма значений $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, соответствующих этому значению β.

При решении задачи распределения описанная процедура повторяется в обратном порядке: из точки x_0 на оси ординат, соответствующей суммарной нагрузке x_0, восстанавливаем перпен-

дикуляр до пересечения с кривой $\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ в точке A. Проводя горизонталь через точку A до пересечения с кривыми $\beta_i(x_i)$, определяем соответствующие значения $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Как следует из построения, в точке оптимального распределения производные производительности по нагрузке равны между собой и суммарная нагрузка равна x_0. Производительность y_i определяется по верхним графикам. В силу монотонности функций $\beta_i(x_i)$ система уравнений имеет единственное решение.

Решение на электрических моделях

В тех случаях, когда вследствие частого изменения общей нагрузки системы x_0 возникает необходимость периодического перераспределения нагрузок, для решения этой задачи используются электрические модели[37].

Рис. 13. Блок-схема электрической модели.

Принцип действия модели основан на законе Кирхгофа для цепей постоянного тока. На рис. 13 изображена блок-схема электрической модели. Система состоит из источника регулируемого напряжения постоянного тока E и функциональных блоков (нелинейных сопротивлений) $Б$-1, $Б$-2,..., $Б$-n, моделирующих зависимости производных характеристики от нагрузки $\beta_i(x_i)$. В приведенной на рисунке схеме $n = 3$. При этом ток, проходящий через i-тый блок I_i, пропорционален нагрузке i-того агрегата, а напряжение на i-том блоке пропорционально производной производительности по нагрузке

$$u_i = \beta_i(I_i) \qquad \text{(III, 38)}$$

Так как функциональные блоки соединены параллельно, падения напряжения на них одинаковы

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n$$
$$\beta_1(I_1) = \beta_2(I_2) = \ldots \beta_n(I_n) \qquad \text{(III, 39)}$$

Согласно закону Кирхгофа, сумма токов в параллельных ветвях равна току, протекающему в общей цепи

$$I_1 + I_2 + \ldots + I_n = I_0 \qquad \text{(III, 40)}$$

Очевидно, что уравнения (III, 39) аналогичны уравнениям (III, 20). Поэтому для решения задачи распределения с помощью потенциометра устанавливается суммарный ток I_0, пропорциональный величине x_0. При этом токи в параллельных ветвях будут пропорциональны искомым нагрузкам $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Решение на аналоговых вычислительных машинах

Задача оптимального распределения может быть легко решена на специализированной или универсальной аналоговой вычислительной машине.

Вместо системы нелинейных алгебраических уравнений подбирают устойчивую систему дифференциальных уравнений, установившееся решение которой совпадает с решением исходной алгебраической системы [38].

На рис. 14 изображена блок-схема модели для решения подобранной системы дифференциальных уравнений на аналоговой машине. Модель состоит из интегратора и n нелинейных блоков ($n = 3$). Зависимость между напряжением на входе интегратора $u_{вх}$ и на его выходе $u_{вых}$ определяется уравнением

$$u_{вых}(t) = a\int_0^t u_{вх}(t)\,dt \qquad (III, 41)$$

где a — постоянная времени интегратора.

Нелинейные блоки моделируют для каждого агрегата зависимости, обратные зависимости производной производительности β от нагрузки x_i:

$$x_i = \psi_i(\beta) \qquad (III, 42)$$

На вход интегратора поступает сумма

$$y = -x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n \qquad (III, 43)$$

Рис. 14. Блок-схема аналоговой модели.

На выходе интегратора получаем величину, пропорциональную β — производной производительности по нагрузке.

Блоки НБ-1, НБ-2, ..., НБ-n включены в цепь обратной связи интегрирующего усилителя.

Таким образом моделируется система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta}{dt} = x_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ x_i = \psi_i(\beta) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (III, 44)$$

В установившемся режиме решение системы уравнений (III, 44) совпадает с решением системы следующих алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ x_i = \psi_i(\beta) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (III, 45)$$

В главе VII будет описан ряд устройств для распределения нагрузок, принцип действия которых основан на аналоговом моделировании системы уравнений (III, 44).

Задача оптимального распределения нагрузок для выпуклых характеристик может быть решена также прямыми методами выпуклого программирования, например методом проектирования градиента [18, 39].

Идея метода заключается в том, что в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется направление градиента функции цели y (вектор $\overline{R}$). Уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \qquad (III, 46)$$

определяет в пространстве $x_1, x_2 \ldots, x_n$ гиперплоскость, на которую проектируется градиент функции цели. Движение в пространстве переменных в направлении проекции градиента на гиперплоскость (III, 46) продолжается до достижения оптимума или границы области существования x_i

$$x_i = M_i \quad \text{или} \quad x_i = m_i \qquad (III, 47)$$

Тогда градиент проектируется на пересечение поверхностей (III, 46), (III, 47) и движение продолжается вдоль их пересечения до оптимума или до нового ограничения и т. д.

Градиент функции цели имеет следующие координаты:

$$\overline{R}\left\{\frac{d\varphi_1}{dx_1}, \frac{d\varphi_2}{dx_2}, \ldots, \frac{d\varphi_n}{dx_n}\right\} \qquad (III, 48)$$

Проекция $\bar{r}$ вектора $\overline{R}$ на гиперплоскость (III, 46) определяется как разность вектора $\overline{R}$ и направляющего вектора $\overline{N}_1(1, 1, \ldots, 1)$ гиперплоскости (III, 46), умноженного на неопределенный множитель λ

$$\bar{r} = \overline{R} - \lambda \overline{N}_1 \qquad (III, 49)$$

Из условия ортогональности векторов $\bar{r}$ и $\overline{N}_1$ определяем λ:

$$(\overline{R} - \lambda \overline{N}_1, \overline{N}_1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\varphi_i}{dx_i} - \lambda n = 0$$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{d\varphi_i}{dx_i}}{n} \qquad (III, 50)$$

Отсюда

$$r_i = \frac{d\varphi_i}{dx_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{d\varphi_i}{dx_i}}{n} \qquad (III, 51)$$

Пусть перемещаясь вдоль вектора $\bar{r}$ мы достигаем границы области допустимых нагрузок, т. е. максимальной нагрузки j-того агрегата

$$x_j = M_j$$

Проекция $\bar{r}^*$ вектора $\overline{R}$ на пересечении плоскостей (III, 46) и (III, 47) определяется как разность вектора $\overline{R}$ и направляющих векторов плоскостей (III, 46) и (III, 47) $\overline{N}_1(1, 1, \ldots, 1)$ и $\overline{N}_2(0, 0, 1, \ldots, 0)$, умноженных на неопределенные множители λ_1 и λ_2

$$\bar{r}^* = \overline{R} - \lambda_1 \overline{N}_1 - \lambda_2 \overline{N}_2 \qquad \text{(III, 52)}$$

Неопределенные множители λ_1 и λ_2 определяются из условия ортогональности векторов $\bar{r}^*$, $\overline{N}_1$ и $\bar{r}^*$, $\overline{N}_2$:

$$\begin{aligned} (\bar{r}^*, \overline{N}_1) &= (\overline{R}, \overline{N}_1) - \lambda_1(\overline{N}_1, \overline{N}_1) - \lambda_2(\overline{N}_2, \overline{N}_1) = 0 \\ (\bar{r}^*, \overline{N}_2) &= (\overline{R}, \overline{N}_2) - \lambda_1(\overline{N}_1, \overline{N}_2) - \lambda_2(\overline{N}_2, \overline{N}_2) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(III, 53)}$$

Подставляя в систему (III, 53) значения R, $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, получим:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{d\varphi_i}{dx_i} - \lambda_1 n - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{d\varphi_i}{dx_i} - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(III, 54)}$$

Решая систему (III,54) и подставляя λ_1 и λ_2 в выражение (III, 52), определяем координаты вектора $\bar{r}^*$

$$r_j^* = \frac{n \dfrac{d\varphi_i}{dx_i} - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{d\varphi_i}{dx_i}}{n-1} \quad j \neq i \qquad r_i = 0 \qquad \text{(III,55)}$$

Описанная процедура распределения может быть выполнена на цифровой вычислительной машине [39].

Аналоговая схема, реализующая градиентный метод поиска оптимума для линейных функций цели, была предложена Пайном [40]. Рассмотрим подробнее, как можно применить этот метод для нелинейных выпуклых функций [41].

Решение на аналоговой вычислительной машине градиентным методом

В работе [41] описывается вычислительное устройство, предназначенное для решения задачи распределения нагрузок с целью получения минимальных затрат, т. е. задачи распределения в постановке (III, 3). Как будет показано ниже, аппаратурное оформление задачи распределения в таком виде упрощается.

Идея метода заключается в следующем: на аналоговой вычислительной машине моделируется движение точки в пространстве переменных x_i в направлении, обратном градиенту функции цели. При достижении границы области изменения переменных

на движущуюся точку начинает действовать выталкивающая сила, перпендикулярная границе. Под ее воздействием точка выталкивается в дозволенную область; здесь действие выталкивающей силы прекращается и точка снова начинает двигаться в направлении, обратном градиенту. Вскоре точка снова попадает на границу, снова подвергается действию выталкивающей силы, в результате на границе возникают дрожания, амплитуда которых определяется инерционностью системы. Таким образом, движение изображающей точки будет складываться из колебаний, перпендикулярных границе, и скольжения вдоль границы в направлении, противоположном проекции градиента на границу.

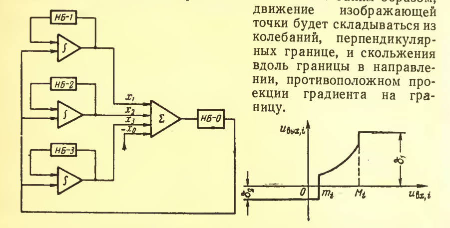


Рис. 15. Блок-схема для распределения по методу Пайна.

Рис. 16. Характеристика нелинейного блока.

Блок-схема модели, реализующей этот алгоритм, применительно к задаче распределения нагрузок при $n = 3$ приведена на рис. 15. Схема состоит из n интеграторов, одного сумматора и $n + 1$ нелинейных блоков. Изображающая точка движется в пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Нелинейные блоки НБ-1, НБ-2, ..., ..., НБ-n моделируют зависимость производной $d\varphi_i/dx_i$ от нагрузки x_i. При нагрузке x_i, большей верхнего предела M_i, выход нелинейного блока равен постоянной положительной величине δ_1, а при нагрузке, меньшей m_i, — постоянной отрицательной величине δ_2 (рис. 16)

$$u_{\text{вых}} = \begin{cases} -\delta_2 & \text{при} \quad x_i < m_i \\ \dfrac{d\varphi_i}{dx_i}(x_i) & \text{при} \quad m_i \leqslant x_i \leqslant M_i \\ \delta_1 & \text{при} \quad x_i > M_i \end{cases} \qquad \text{(III, 56)}$$

Нелинейные блоки включены в обратные связи интеграторов. Напряжение на выходе i-того интегратора пропорционально нагрузке агрегата x_i. Напряжение на входе i-того интегратора про-

порционально взятой со знаком минус проекции скорости движения изображающей точки на ось x_i

$$-u_{i\,\text{вх}} = v_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad \text{(III, 57)}$$

Нелинейный блок НБ-0 имеет релейную характеристику

$$u_{\text{вых}} = \begin{cases} \delta_0 & \text{при} \quad u_{\text{вх}} \leqslant 0 \\ 0 & \text{при} \quad u_{\text{вх}} > 0 \end{cases} \qquad \text{(III, 58)}$$

Если в начальный момент времени нагрузки блоков находятся в допустимых пределах $(m_i \leqslant x_i \leqslant M_i)$ и суммарная нагрузка превышает заданную $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - x_0 > 0\right)$, то на выходе нелинейного блока НБ-0 напряжение будет равно нулю. Тогда на вход i-того интегратора поступает только выходное напряжение нелинейного блока НБ-i; это напряжение пропорционально $d\varphi_i/dx_i$, поэтому выход интегратора, пропорциональный x_i, убывает со скоростью $v_i = d\varphi_i/dx_i$ до тех пор, пока суммарная нагрузка не станет меньше заданной

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - x_0 < 0 \qquad \text{(III, 59)}$$

При этом выходное напряжение сумматора станет отрицательным, что приведет к появлению отрицательной величины δ_0 на выходе нелинейного блока НБ-0 и на входах всех интеграторов. Абсолютная величина выхода нелинейного блока δ_0 больше максимального значения $d\varphi_i/dx_i$ для любого x_i

$$\delta_0 > \left(\frac{d\varphi_i}{dx_i}\right)_{\max} \qquad \text{(III, 60)}$$

Поэтому сумма напряжений на входе в интегратор меньше нуля, скорость v_i становится положительной и нагрузки x_i начинают расти. Как только нагрузки x_i слегка возрастут, условие $\sum_{i=1}^{n} x_i < x_0$ восстанавливается, выход НБ-0 становится равным нулю, изображающая точка снова движется в направлении, обратном градиенту. В результате одновременно с перемещением вдоль границы происходит дрожание изображающей точки.

На рис. 17 изображена траектория движения к оптимуму для случая двух агрегатов. Кривые линии изображают поверхности уровня функции $\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$.

Из начального положения A_0 точка движется по траектории, перпендикулярной поверхностям уровня, до пересечения с границей, задаваемой уравнением $x_1 + x_2 = x_0$, а затем с дрожа-

нием скользит вдоль границы до точки A, соответствующей минимуму целевой функции.

Если в процессе движения к оптимуму точка попадает на границу $x_i = M_i$, на входе интегратора появляется величина $\delta_2 > \delta_0$ и нагрузка уменьшается. Если достигается граница $x_i = m_i$, на входе интегратора появляется отрицательная величина δ_1 и нагрузка увеличивается.

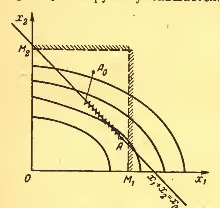


Рис. 17. Траектория движения к оптимуму.

В том случае, когда зависимость затрат от нагрузки выражается функцией 2-го порядка

$$y_i = a_i + b_i x_i + c_i x_i^2 \quad \text{(III, 61)}$$

производная линейно зависит от нагрузки

$$\frac{d\varphi_i}{dx_i} = b_i + 2c_i x_i \quad \text{(III, 62)}$$

схема упрощается: функции нелинейных блоков в обратных связях интеграторов выполняют сопротивления. Величины этих сопротивлений R_i определяются из условия

$$R_i = R_0 c_i$$

где R_0 — входиое сопротивление усилителя.

Постоянная величина b_i из формулы (III, 62) моделируется с помощью постоянного напряжения, создаваемого на входе интегрирующего блока.

Для линейных зависимостей $\varphi_i(x_i)$ производная $d\varphi_i/dx_i$ будет постоянной величиной, не зависящей от нагрузки. В этом случае на входы интегрирующих блоков поступают постоянные напряжения

$$\alpha_i = \frac{d\varphi_i}{dx_i} \quad \text{(III, 63)}$$

Таким образом, для решения задачи распределения нагрузок между n агрегатами необходимо иметь n интеграторов, один сумматор, n нелинейных блоков, моделирующих зависимость $\frac{d\varphi_i}{dx_i}(x_i)$, и один нелинейный блок с релейной характеристикой. В том случае, когда зависимость $\varphi_i(x_i)$ может быть аппроксимирована уравнением не выше 2-го порядка, моделирующая установка содержит только один нелинейный блок с релейной характеристикой.

Невыпуклая характеристика

Распределение нагрузок между агрегатами, характеристики которых невыпуклы, т. е. вогнуты или имеют перегибы, представляет собой более сложную задачу. Наименьшее значение функции цели может достигаться как внутри, так и на границах области существования нагрузок x_i, при этом внутри области существования может быть несколько экстремумов.

Общие методы решения задач невыпуклого программирования достаточно сложны[42]. В них используют случайный или упорядоченный перебор возможных сочетаний переменных, либо разбиение задачи на подзадачи выпуклого программирования и дальнейший перебор частных экстремумов. Рассмотрим некоторые частные виды невыпуклых характеристик, встречающихся в химической промышленности.

Вогнутая характеристика

Если зависимости $y_i(x_i)$ вогнутые, второй дифференциал функции цели d^2F всегда положителен

$$d^2F = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2y_i}{dx_i^2} dx_i^2 \geqslant 0 \qquad (III, 64)$$

Поэтому при решении системы уравнений (III, 19) определяется минимум функции цели. Своего наибольшего значения функция цели достигает на границах области определения. Для нахождения наибольшего значения функции цели необходимо перебрать все сочетания нагрузок типа

$$x_i = M_i \qquad x_j = m_j \qquad x_k = x_0 - \sum_i M_i - \sum_j m_j \qquad (III, 65)$$

и найти сочетание, соответствующее наибольшему значению функции цели. При этом число вариантов равно $n \cdot 2^{n-1}$.

В практически важных случаях нагрузка системы параллельно работающих агрегатов близка к предельной, т. е.

$$x_0 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} M_i > m_l \qquad (III, 66)$$

для любого l. Следовательно, необходимо перебрать сочетания нагрузок типа

$$x_i = M_i \qquad x_l = x_0 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} M_i \qquad (III, 67)$$

При этом число вариантов равно n.

Для некоторых аппаратов химической промышленности характерна выпукло-вогнутая форма зависимости производительности от нагрузки (рис. 18). При очень малых и очень больших нагрузках увеличение полезного выхода процесса требует большего увеличения входной нагрузки. В области средних нагрузок режим работы наиболее экономически благоприятен: сравнительно небольшое увеличение нагрузки приводит к значительному увеличению полезного выхода.

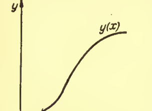


Рис. 18. Выпукло-вогнутая характеристика.

Для решения задачи распределения в этом случае можно воспользоваться графическим методом[43], аналогичным графическому методу решения задачи распределения для выпуклых функций, но имеющим некоторые особенности.

На рис. 19 изображены зависимости $y_i(x_i)$. Если через точку A_i с координатами 0, $y_i(0)$ провести прямую, касающуюся кривой $y_i(x_i)$ сверху, то точка касания B_i будет лежать на выпуклой части кривой. В нижней части рисунка построены зависимости $\beta_i(x_i)$. В области после точки B_i значение функции равно производной характеристики по нагрузке, а в области до точки B_i значение β_i не определено

$$\beta_i(x_i) = \frac{dy_i}{dx_i} \quad \text{для} \quad x_i > x_{B_i} \tag{III, 68}$$

Суммарная характеристика $\beta\left(\sum x_i\right)$ строится так же, как в случае выпуклых зависимостей $y_i(x_i)$: на оси ординат откладывается значение β, на оси абсцисс — сумма значений $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, соответствующая этому значению β. В отличие от случая выпуклых зависимостей $y_i(x_i)$ кривая $\beta\left(\sum x_i\right)$ имеет разрывы в точках, соответствующих нагрузке i-того агрегата.

Для нахождения оптимального распределения нагрузки откладываем на оси абсцисс соответствующее значение x_0 и восставляем перпендикуляр до пересечения с кривой $\beta\left(\sum x_i\right)$. Если перпендикуляр пересекается с нею в точке, где кривая $\beta\left(\sum x_i\right)$ непрерывна (см. x_0 на рис. 19), то через точку пересечения следует провести прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с кривыми $\beta_i(x_i)$. Полученные значения x_i^* определяют оптимальное распределение. Если же перпендикуляр из точки x_0' пересекает кривую $\beta\left(\sum x_i\right)$ в области разрыва и разрыв суммарной характеристики вызван i-тым агрегатом, следует задаться ближайшей меньшей нагрузкой x_0'', соответствующей непрерывному участку кривой. Распределение нагрузки x_0'' между

агрегатами проводится так же, как и в предыдущем случае. При этом нагрузка i-того агрегата будет составлять m_i. Увели-

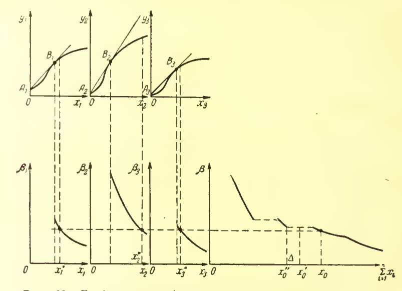


Рис. 19. Графическое решение задачи распределения нагрузок (выпукло-вогнутые характеристики).

чим ее на величину Δ, равную $x_0' - x_0''$. Тогда

$$x_i = m_i + \Delta \qquad (III, 69)$$

В результате суммарная нагрузка всех агрегатов будет равна x_0'.

Непрерывные функции произвольной формы

Для решения задачи оптимального распределения в этом случае необходимо осуществить перебор всех возможных сочетаний граничных значений нагрузки и всех внутренних экстремумов и найти наибольшее из всех полученных значений. Для отыскания локальных максимумов можно воспользоваться одним из методов, описанных выше.

Рассмотрим метод решения задачи распределения, основанный на переборе всех возможных экстремумов [44]. Нелинейные функции $y_i(x_i)$ заменяем кусочно-линейными. Для каждого возможного сочетания линейных отрезков характеристик решается задача линейного программирования, и затем из всех решений выбирают наибольшее.

Пусть $y_i(x_i)$ — непрерывная невыпуклая функция. Проведем кусочно-линейную аппроксимацию этой функции. Если желательно, чтобы погрешность аппроксимации не превышала вели-

чины Δ, то длину интервала разбиения l следует определять по формуле

$$l^2 \leqslant \frac{8\Delta}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\max}} \qquad \text{(III, 70)}$$

Знаменателем является модуль максимального значения второй производной функции $y(x)$ для всей области изменения x.

Если число отрезков аппроксимации i-той характеристики равно m_i, то задача распределения разбивается на N задач линейного программирования $(N = m_1 m_2 \ldots m_n)$

$$\begin{gathered}\max \sum_{i=1}^{n} y_{ij}(x_{ij}) \\ y_{ij} = y_i(x_{ij}^*) + \alpha_{ij}x_{ij} \\ x_{ij}^* \leqslant x_{ij} \leqslant x_{i,\,j+1}^* \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = x_0\end{gathered} \qquad \text{(III, 71)}$$

где i — номер агрегата; j — номер точки перелома (узла) кусочно-линейной характеристики; x_{ij}^* — координата j-того узла i-той характеристики.

На рис. 20 показана блок-схема устройства, осуществляющего последовательный перебор N задач линейного программирования и выбор из их числа задачи, обеспечивающей глобальный максимум[44].

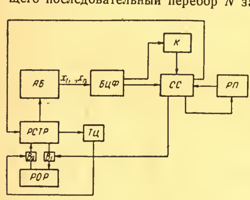


Рис. 20. Блок-схема устройства для распределения нагрузок.

Аналоговый блок АБ решает задачу линейного программирования (III, 71). Когда очередное элементарное решение заканчивается, функция цели перестает меняться и блок K выдает на схему сравнения СС команду начала сравнения целевой функции, хранящейся в регистре памяти РП, с ее значением на выходе блока целевых функций БЦФ. Если значение целевой функции, полученное в результате последнего решения, меньше записанного в РП, то СС выдает в РП новое значение. В регистре-счетчике РСТР записан номер текущего элементарного решения; РСТР задает блоку АБ значения x_{ij}^* и x_{ij+1}^*, ограничивающие величину x_i. После каждого элементарного ре-

шения в регистр-счетчик добавляется единица. Если это решение является максимальным, т. е. записывается в регистр памяти РП, то номер решения через систему вентилей $В_1$ передается в регистр оптимального решения РОР.

После того как перебор окончен, триггер ТЦ перебрасывается, номер оптимального решения из регистра РОР передается в регистр РСТР и оптимальное элементарное решение повторяется для того, чтобы вывести необходимые данные на печатающее устройство.

Задача распределения нагрузок для сложных функций весьма эффективно может быть решена методом динамического программирования [29, 46].

Этот метод был применен для решения задачи распределения нагрузок между блоками разделения воздуха [9], между химическими реакторами [45, 11], для рационального выбора производительности скважин месторождения [47] и т. д.

Идея метода заключается в замене многомерной задачи оптимизации последовательностью одномерных задач. Задача решается поэтапно: сначала рассматривается задача распределения для одного агрегата, затем для двух, для трех и т. д. до n. На каждом этапе руководствуются принципом оптимальности (см. гл. II).

Рассмотрим подробнее алгоритм оптимального распределения нагрузок методом динамического программирования. Через R_k обозначим производительность системы при оптимальном распределении нагрузок между k агрегатами

$$R_k(x_0) = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_k} \sum_{i=1}^{k} y_i(x_i) \qquad \text{(III, 72)}$$

при

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = x_0$$

Очевидно, что для одного агрегата

$$R_1(x_0) = \max y_1(x_1) = y_1(x_0) \qquad \text{(III, 73)}$$

при

$$x_1 = x_0$$

а для двух агрегатов

$$R_2(x_0) = \max\left[y_2(x_2) + y_1(x_1)\right] = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant x_0}\left[y_2(x_2) + R_1(x_0 - x_2)\right] \qquad \text{(III, 74)}$$

На каждом последовательном этапе осуществляется распределение нагрузки между последним присоединяемым аппаратом и системой всех предыдущих аппаратов, в которой нагрузка уже была распределена оптимальным образом.

Основное рекурентное соотношение при этом имеет вид

$$R_k(x_0) = \max_{m_k \leqslant x_k \leqslant M_k} [y_k(x_k) + R_{k-1}(x_0 - x_k)] \qquad \text{(III, 75)}$$

Таким образом, n-мерная задача оптимизации сводится к последовательности одномерных задач. На каждом этапе получаем значение оптимизируемой функции $R_k(x_0)$ и значение функции $x_k^{\text{опт}}(x_0)$, обеспечивающей оптимальное распределение.

Система распределения, максимизирующая производительность, может быть получена с помощью функций $x_k(x_0)$ по формулам

$$\begin{aligned} x_n^* &= x_n^{\text{опт}}(x_0) \\ x_{n-1}^* &= x_{n-1}^{\text{опт}}(x_0 - x_n^*) \\ x_{n-2}^* &= x_{n-2}^{\text{опт}}(x_0 - x_n^* - x_{n-1}^*) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^* &= x_1^{\text{опт}}(x_0 - x_n^* - x_{n-1}^* - \ldots - x_2^*) \end{aligned} \qquad \text{(III, 76)}$$

На рис. 21 показано, как получить оптимальное распределение по этим формулам графическим способом.

При $n = 3$ откладываем на оси абсцисс отрезок $OA_3 = x_0$, восставляем перпендикуляр до пересечения кривой $x_3^{\text{опт}}(x_0)$ в точке B_3. Отрезок A_3B_3 пропорционален оптимальной нагрузке 3-го аппарата x_3^*. Через точку B_3 проводим прямую под углом 45° к оси абсцисс. Ее пересечение с осью абсцисс в точке A_2 отсекает отрезок $OA_2 = x_0 - x_3$. Восставляя перпендикуляр из точки A_2 до пересечения с кривой $x_2^{\text{опт}}(x_0)$, определяем оптимальную нагрузку 2-го аппарата x_2^* и т. д. Построение продолжаем до получения нагрузки 1-го аппарата.

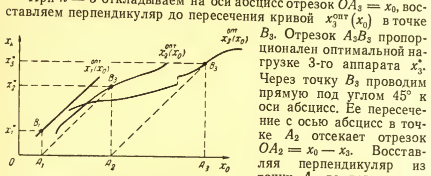


Рис. 21. Графическое решение задачи динамического программирования.

Как было показано выше, метод динамического программирования позволяет свести многомерную задачу распределения к последовательности задач определения максимума функции одной переменной, т. е. вместо однократного распределения нагрузок между n агрегатами многократно распределять нагрузки между двумя агрегатами.

Как известно, способ распределения нагрузок между двумя аппаратами зависит от вида функций $y_i(x_i)$. Предположим, что для нахождения максимума функции одной переменной $f(t)$ в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ вычисляют значение этой функции в m точках, отстоящих друг от друга на расстояние δ: $t_0, t_0 + \delta, \ldots, t_1$.

Из значений функции $f(t)$ в этих точках выбирают наибольшее. Если осуществлять такой перебор в пространстве n переменных, то общее число переборов z_1, необходимое для распределения нагрузки между n агрегатами, составит m^n. Если же осуществлять перебор по методу динамического программирования, то необходимое число переборов z_2 составит $mn + \frac{m^2(n-1)}{2}$. Для сравнения можно показать, что при $m = 10$ и $n = 5$ величина $z_1 = 10^5$, а $z_2 = 2{,}5 \cdot 10^2$, т. е. число переборов уменьшается в 400 раз.

Для сокращения числа переборов при решении подобной задачи используются специальные методы, например «метод трубки», заключающийся в том, что сначала производится грубое разбиение функции цели, в результате которого определяется область максимума, а затем в этой области производится разбиение на более мелкие участки ($\delta_2 \ll \delta_1$) и снова решается задача динамического программирования, но уже только для этой области.

В работе [48] приводится пример графического решения задачи распределения для кусочно-линейных характеристик, основанный на методе динамического программирования.

Рассмотрим практичный инженерный метод оптимального распределения нагрузок между двумя агрегатами, характеристики которых имеют произвольную форму (метод совмещения характеристик) [49, 50].

Предварительно необходимо изготовить два шаблона, отражающие характеристики агрегатов. Фигура $0_1 y_{1m} x_{1m}$ на рис. 22, *а* является шаблоном характеристики первого агрегата, фигура $0_2\, y_{2m}\, x_{2m}$ — второго агрегата (индекс m обозначает максимальные значения y_i и x_i). Задаемся общей нагрузкой x_0. Укладываем первый шаблон на отрезок Ox так, что точка O_1 шаблона совпадает с точкой O, а второй шаблон, не отрывая от плоскости, поворачиваем на 180° и совмещаем его точку 0_2 с прямой, перпендикулярной оси абсцисс в точке x_0 (рис. 22, *б*). Точки пересечения шаблонов дают вариант распределения нагрузок. Так, при положении второго шаблона, обозначенном пунктиром на рис. 22, *б*, нагрузка первого агрегата составляет O_1M, нагрузка второго составляет $x_0 - O_1M$. Производительность определяется отрезком x_0O_2.

Будем перемещать второй шаблон вверх до тех пор, пока он не займет наивысшее возможное положение, при котором шаблоны будут соприкасаться. На рис. 22, *б* этому положению соответствует фигура $0'_2 y'_{2m} x'_{2m}$.

В точке M^* характеристики агрегатов имеют общую касательную, т. е. соблюдается условие оптимального распределения для выпуклых характеристик

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2} \qquad \text{(III, 77)}$$

Очевидно, что распределение нагрузок, при котором $x_1 = OM'$, $x_2 = x_0 - OM'$, обеспечивает максимальную производительность.

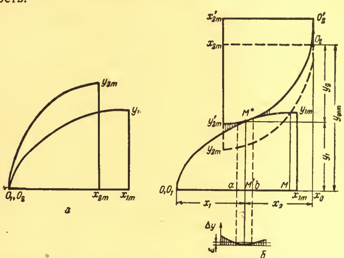


Рис. 22. Распределение нагрузок методом совмещения характеристик (выпуклые характеристики):
а — шаблоны; *б* — оптимальное распределение нагрузок.

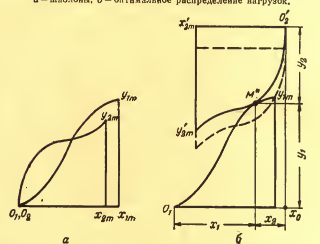


Рис. 23. Распределение нагрузок методом совмещения характеристик (невыпуклые характеристики):
а — шаблоны; *б* — оптимальное распределение нагрузок.

На рис. 23 показано распределение нагрузок при невыпуклых характеристиках.

При изменении общей нагрузки x_0 траектория точки O_2' будет определять зависимость общей производительности от об-

щей нагрузки при оптимальном распределении $R_1(x_0)$. Используя эту траекторию как неподвижный шаблон, можно распределить нагрузки между двумя первыми и третьим агрегатом. При этом характеристика третьего агрегата будет служить подвижным шаблоном. Таким образом, с помощью метода совмещения характеристик можно распределять нагрузки между n агрегатами.

Заштрихованные участки на рис. 22, б показывают потери Δy, связанные с неоптимальным распределением нагрузок. На рисунке хорошо видна зона слияния совмещенных характеристик ab, т. е. участок, где $\Delta y < \varepsilon$ (величина ε определяется разрешающей способностью измерительных приборов). В пределах этой зоны отклонение от оптимального распределения не приводит к заметному увеличению потерь. Очевидно, что чем меньше крутизна характеристик d^2y/dx^2, тем меньше требования к точности поддержания оптимального распределения.

Многомерная задача распределения нагрузок

Как уже отмечалось выше, нагрузка x_0 может быть векторной величиной. Например, в химической промышленности очень часто ставится задача распределения нагрузок для достижения минимальных затрат при заданном количестве и качестве продукции либо одновременно может осуществляться распределение нескольких продуктов (или ресурсов). При этом задача может быть поставлена следующим образом:

найти $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$, обеспечивающие максимум функции

$$\max y = \max \sum_{i=1}^{n} y_i (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \qquad \text{(III, 78)}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = x_{0j} \qquad j = 1, 2, \ldots, k \qquad \text{(III, 79)}$$

Необходимо различать два случая:

1. Функции $y_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik})$ сепарабельные, т. е. могут быть представлены в виде

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{ij} (x_{ij}) \qquad \text{(III, 80)}$$

В этом случае задача распределения распадается на k независимых одномерных задач, каждая из которых решается отдельно одним из предложенных ранее методов.

2. Функции $y_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik})$ несепарабельные.

В этом случае решение задачи распределения усложняется. В качестве примера покажем, как осуществляется решение

многомерной задачи распределения с использованием неопределенных множителей Лагранжа λ.

Запишем вспомогательную функцию Лагранжа

$$F=\sum_{i=1}^{n} y_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik})-\sum_{j}^{k} \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}-x_{0j}\right) \qquad \text{(III, 81)}$$

Дифференцируя F по x_{ij}, получаем систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial x_{ij}}=\lambda_j \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=x_{0j} \qquad i=1, 2, \ldots, n \qquad j=1, 2, \ldots, k \end{cases} \qquad \text{(III, 82)}$$

Производные $\partial y_i / \partial x_{ij}$ представляют собой функции нескольких переменных. Решение такой системы, как правило, достаточно сложно и должно осуществляться на цифровой вычислительной машине.

Для снижения размерности задачи можно провести ее декомпозицию (см. гл. II).

Например, требуется найти $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n$, максимизирующие функцию

$$\max \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i, z_i) \qquad \text{(III, 83)}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=x_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i=z_0$$

(двухмерная задача).

Найдем максимум вспомогательной функции

$$\max \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i, z_i)-\lambda z_i \qquad \text{(III, 84)}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=x_0 \qquad \text{(III, 85)}$$

Максимизация функции y по x_i выполняется независимо от максимизации по z_i. Сначала определяем значения вспомогательной функции

$$g_i(x_i, \lambda)=\max_{z_i} y_i(x_i, z_i)-\lambda z_i \qquad \text{(III, 86)}$$

Затем решается задача определения максимума функции

$$\max_x G(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i, \lambda) \qquad \text{(III, 87)}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0 \qquad \text{(III, 88)}$$

Это обычная одномерная задача распределения. Решение этой задачи зависит от λ и в общем случае не удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^{n} z_i = z_0$. Поэтому процедуру повторяют при других λ до тех пор, пока это условие не окажется выполненным с необходимой точностью.

Так как на цифровых вычислительных машинах значительно легче несколько раз решать одномерную задачу распределения, чем однократно — многомерную, изложенный метод обеспечивает значительную экономию машинного времени и памяти.

Сводка методов и принципов распределения нагрузок для одномерных задач распределения при разных зависимостях $y(x)$ приведена в табл. 1.

Как видно из этой таблицы, методы решения задачи распределения зависят от вида характеристик агрегатов.

Если распределение нагрузок должно обеспечить *минимизацию* затрат, т. е. задача поставлена в виде (III, 3), то принципы распределения для выпуклых характеристик $x_i = \psi_i(y_i)$ соответствуют принципам распределения для вогнутых характеристик $y_i = \varphi_i(x_i)$ и наоборот. Для *линейных* и вогнутых кусочно-линейных характеристик $\psi_i(y_i)$ оптимальное распределение заключается в последовательной загрузке агрегатов в порядке *увеличения* наклонов характеристик; для *вогнутых* характеристик условием оптимального распределения является *равенство* производных $d\psi_i/dy_i$ для всех агрегатов; для *выпуклых* характеристик при оптимальном распределении все агрегаты, кроме одного, имеют максимальную или минимальную нагрузку.

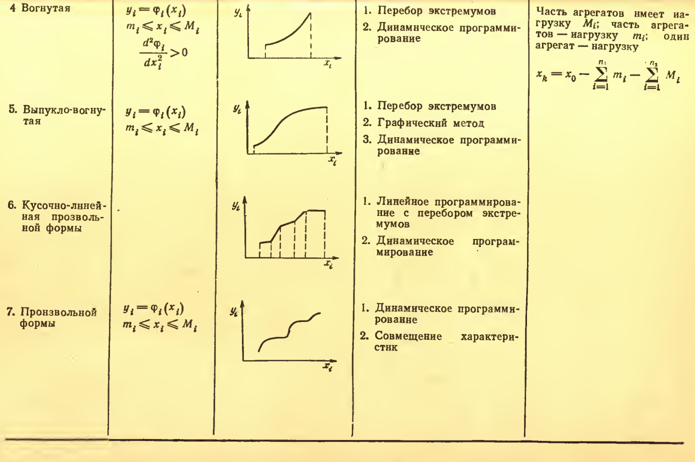
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ АГРЕГАТОВ

В химической промышленности часто приходится решать задачу управления последовательно соединенными реакторами, экстракторами и другими аппаратами [53, 54, 56, 57]. Система последовательных аппаратов изображена на рис. 2. Обозначим вектор входа в i-тое звено через x_{i-1}, вектор выхода — через x_i. Предполагаем, что управление каждым из последовально соединенных аппаратов осуществляется оптимальным образом,

ТАБЛИЦА 1

Методы оптимального распределения нагрузок между параллельными агрегатами

Зависимость выхода от входа	Формула	График функции	Метод распределения нагрузок	Принципы оптимального распределения нагрузок
1. Линейная	$y_i = \alpha_i + \beta_i x_i$ $m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$		1. Линейное программирование	Последовательная загрузка агрегатов в порядке уменьшения β_i
2. Выпуклая кусочно-линейная	$y_i = \varphi_i(x_i)$ $m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$		1. Выпуклое линейное программирование 2. Метод Пайна	Последовательная загрузка агрегатов в порядке уменьшения наклонов β_{ij}
3. Выпуклая непрерывная	$y_i = \varphi_i(x_i)$ $m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$ $\frac{d^2\varphi_i}{dx_i^2} < 0$		1. Метод неопределенных множителей Лагранжа 2. Графический метод 3. Моделирование на электрической модели 4. Моделирование на аналоговой ВМ 5. Градиентный метод 6. Метод Пайна	Равенство производных производительности по нагрузке для всех агрегатов $\frac{d\varphi_i}{dx_i} = \lambda$



4 Вогнутая	$y_i = \varphi_i(x_i)$ $m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$ $\frac{d^2\varphi_i}{dx_i^2} > 0$		1. Перебор экстремумов 2. Динамическое программирование	Часть агрегатов имеет нагрузку M_i; часть агрегатов — нагрузку m_i; один агрегат — нагрузку $x_k = x_0 - \sum_{i=1}^{n_1} m_i - \sum_{i=1}^{n_2} M_i$
5. Выпукло-вогнутая	$y_i = \varphi_i(x_i)$ $m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$		1. Перебор экстремумов 2. Графический метод 3. Динамическое программирование	
6. Кусочно-линейная произвольной формы			1. Линейное программирование с перебором экстремумов 2. Динамическое программирование	
7. Произвольной формы	$y_i = \varphi_i(x_i)$ $m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$		1. Динамическое программирование 2. Совмещение характеристик	

т. е. известны зависимости

$$\varphi_i(x_{i-1}, x_i) = \max_{u_i} \varphi_i(x_i, x_{i-1}, u_i) \qquad \text{(III, 89)}$$

при

$$x_i = f_i(x_{i-1}, u_i) \qquad \text{(III, 90)}$$

Решаем задачу координации: найти $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обеспечивающие максимальное значение функции цели

$$\max \Phi = \max \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_{i-1}, x_i) \qquad \text{(III, 91)}$$

при

$$m_i \leqslant x_i \leqslant M_i \qquad \text{(III, 92)}$$

Рассмотрим различные методы решения задачи оптимизации для функций цели различного вида.

Линейная функция цели

Если $\varphi_i(x_{i-1}, x_i)$ — линейная функция, т. е.

$$\varphi_i(x_{i-1}, x_i) = a_i + b_i x_{i-1} + c_i x_i \qquad \text{(III, 93)}$$

то для решения задачи координации может быть применен метод линейного программирования. Тогда задача управления примет вид:

$$\max \Phi = \max \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i x_{i-1} + c_i x_i) \qquad \text{(III, 94)}$$

при

$$m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$$

Группируя члены с x_i, получаем

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} + c_i) x_i + b_1 x_0 + c_n x_n \qquad \text{(III, 95)}$$

Задача линейного программирования оказывается вырожденной. Значения x_i определяются знаками при коэффициентах:

если $b_{i+1} + c_i > 0$, то $x_i = M_i$;
если $b_{i+1} + c_i < 0$, то $x_i = m_i$.

Решение задачи распределения для агрегатов с линейной функцией цели имеет большое значение. В практике оптимизации сложных комплексов часто применяются линейные модели (модель получена при помощи линейного регрессионного анализа, проведена линеаризация исходной нелинейной задачи на малом интервале изменения переменных и пр.).

Выпуклая функция цели

Для решения задачи управления при выпуклой функции цели могут быть использованы различные методы нелинейного программирования. Рассмотрим решение задачи распределения с применением различных методов оптимизации.

Градиентные методы

Задаемся произвольными значениями переменных x_0^0, x_1^0, ..., x_n^0, находящимися в допустимых пределах $m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$. Затем определяем направление наибыстрейшего возрастания функции цели. На этом направлении берем новую точку, снова определяем направление градиента и т. д. Компоненты вектора градиента определяются по формулам

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \\ r_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ r_{n-1} &= \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{n-1}} \\ r_n &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{aligned} \qquad \text{(III, 96)}$$

Новое значение переменных x_1, x_2, ..., x_n определяется выражением

$$x_i' = x_i^0 + \Delta r_i \qquad \text{(III, 97)}$$

Принципы выбора шага поиска Δ и оценка точности и скорости приближения к экстремуму излагаются, например, в работах [18, 21]. Как уже отмечалось, перемещение в направлении оптимума может происходить не только по градиенту, но и по другим направлениям, составляющим с ним острый угол.

Методы классического анализа

Если известно, что экстремум функции цели (III, 92) находится внутри области ограничений, то для определения экстремума необходимо найти стационарную точку этой функции, в которой ее производные по переменным x_0, x_1, ..., x_n равны нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \\ \dots\dots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \qquad \text{(III, 98)}$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}(x_0, x_1) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0, x_1) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{(III, 99)}$$

$$\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(x_{n-2}, x_{n-1}) + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{n-1}}(x_{n-1}, x_n) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x_{n-1}, x_n) = 0$$

Решения системы уравнений (III, 99) определяют стационарные точки функции. Для определения максимума необходимо исследовать знак второго дифференциала функции

$$d^2\Phi = \sum_{i,\,j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j \qquad \text{(III, 100)}$$

Если $d^2\Phi < 0$, стационарная точка является максимумом.

Систему уравнений (III, 99) решают последовательно от начала процесса (задан вход системы x_0) либо от конца (задан выход системы x_n). Из первого уравнения определяют x_1; подставив x_0 и x_1 во второе уравнение, определяют x_2 и т. д.

Наибольшее значение функции может достигаться либо в максимуме, лежащем внутри области допустимых ограничений, либо на границе области. В последнем случае необходимо определить условные экстремумы функции при всех возможных сочетаниях границ и выбрать наибольший.

Функция цели произвольной формы

Метод динамического программирования

Если зависимости $\varphi_i(x_{i-1}, x_i)$ произвольной формы, функция цели может иметь несколько экстремумов. При этом весьма эффективен метод динамического программирования, хорошо приспособленный для решения задач управления последовательными системами [10, 46].

Процесс решения задачи оптимального уравнения с помощью динамического программирования делится на две части. На первом этапе для каждого последовательного звена строят таблицу или записывают функцию, связывающую оптимальные значения выхода x_i и целевой функции φ_i со входом данного звена x_{i-1}. На втором этапе с помощью полученных таблиц или функций находят оптимальное управление.

Рассмотрим подробнее процесс расчета оптимального управления. Последовательность вычислений зависит от того, какая величина — вход системы x_0 или ее выход x_n — задана заранее.

Если задан вход системы x_0^*, задача решается следующим образом. Сначала рассматривается два первых участка, функции цели для которых соответственно равны $\varphi_1(x_0, x_1)$ и $\varphi_2(x_1, x_2)$. Величину x_1 определяют таким образом, чтобы при заданных x_0 и x_2 функция цели для первых двух участков была максимальной

$$R_2\left(x_0^*,\ x_2\right) = \max_{m_1 \leqslant x_1 \leqslant M_1} \left[\varphi_1\left(x_0^*,\ x_1\right) + \varphi_2\left(x_1,\ x_2\right)\right] \qquad \text{(III, 101)}$$

Отметим, что в выражении (III, 101) x_0^* — заданное число, в то время как x_2 — переменная величина, которая может принимать любые значения в области

$$m_2 \leqslant x_2 \leqslant M_2$$

Одновременно определяется зависимость оптимального значения входной величины первого участка x_1 от его выхода x_2

$$x_1^{\text{опт}} = x_1^{\text{опт}}\left(x_0^*,\ x_2\right) \qquad \text{(III, 102)}$$

На следующем шаге оптимизации к первым двум участкам присоединяют третий и определяют x_2 таким образом, чтобы функция цели для трех участков была максимальной. При этом первые два участка рассматривают как один, имеющий вход x_0 и выход x_2

$$R_3\left(x_0^*,\ x_3\right) = \max_{m_2 \leqslant x_2 \leqslant M_2} \left[\varphi_3\left(x_2,\ x_3\right) + R_2\left(x_0^*,\ x_2\right)\right] \qquad \text{(III, 103)}$$

В результате определяют зависимость

$$x_2^{\text{опт}} = x_2^{\text{опт}}\left(x_0^*,\ x_3\right) \qquad \text{(III, 104)}$$

Далее к трем участкам добавляют четвертый, пятый и т. д. Дойдя до последнего участка, находят функцию цели всей последовательной системы, зависящую от входа и выхода

$$R_n\left(x_0^*,\ x_n\right) = \max_{m_{n-1} \leqslant x_{n-1} \leqslant M_{n-1}} \left[\varphi_n\left(x_{n-1},\ x_n\right) + R_{n-1}\left(x_0^*,\ x_{n-1}\right)\right] \qquad \text{(III, 105)}$$

$$x_{n-1}^{\text{опт}} = x_{n-1}^{\text{опт}}\left(x_0^*,\ x_n\right) \qquad \text{(III, 106)}$$

Затем следует последний шаг: определение x_n, обеспечивающего максимум функции цели всей системы

$$R_{n+1}\left(x_0^*\right) = \max_{m_n \leqslant x_n \leqslant M_n} R_n\left(x_0^*,\ x_n\right) \qquad \text{(III, 107)}$$

$$x_n^{\text{опт}} = x_n^{\text{опт}}\left(x_0^*\right) = x_n^* \qquad \text{(III, 108)}$$

Далее переходят ко второму этапу оптимизации, на котором последовательно определяют оптимальные потоки x^*_{n-1}, x^*_{n-2} и т. д.

$$\begin{aligned} x^*_{n-1} &= x^{\text{опт}}_{n-1}\left(x^*_0,\ x^*_n\right) \\ x^*_{n-2} &= x^{\text{опт}}_{n-2}\left(x^*_0,\ x^*_{n-1}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^*_1 &= x^{\text{опт}}_1\left(x^*_0,\ x^*_2\right) \end{aligned} \qquad \text{(III, 109)}$$

Второй этап процесса определения оптимальных связей для одномерного варианта может быть показан графически. Проведем построение для $n = 4$ (рис. 24). Нанесем на график функции

$$x^{\text{опт}}_1(x_2),\ x^{\text{опт}}_2(x_3),\ \ldots,\ x^{\text{опт}}_{n-1}(x_n)$$

Масштаб $x^{\text{опт}}_i$ по оси абсцисс и оси ординат должен совпадать. Отложим величину x^*_n на оси абсцисс и восставим перпендикуляр до пересечения с кривой $x_{n-1} = x^{\text{опт}}_{n-1}(x_n)$ в точке A_n.

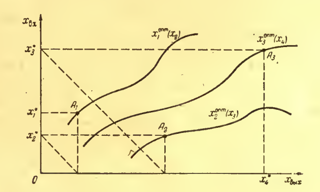


Рис. 24. Графическое решение задачи управления последовательной схемой.

Ордината этой точки есть оптимальное значение величины x^*_{n-1}. Отложим эту величину на оси абсцисс (проведем прямую под углом 45° через точку x^*_{n-1} на оси ординат до пересечения с осью абсцисс) и восставим из полученной точки перпендикуляр до пересечения с кривой $x_{n-2} = x^{\text{опт}}_{n-2}(x_{n-1})$. Дальнейшее построение проводится аналогичным образом.

Если заранее задан не вход, а выход системы x^*_n, то расчет на первом этапе производится в обратном порядке (от послед-

него звена к первому) по рекурентным формулам

$$R_1\left(x_{n-2},\ x_n^*\right) = \max_{x_{n-1}}\left[\varphi_n\left(x_{n-1},\ x_n^*\right) + \varphi_{n-1}\left(x_{n-2},\ x_{n-1}\right)\right]$$

$$x_{n-1}^{\text{опт}} = x_{n-1}^{\text{опт}}\left(x_{n-1},\ x_n^*\right) \qquad \text{(III, 110)}$$

$$R_2\left(x_{n-3},\ x_n^*\right) = \max_{x_{n-2}}\left[\varphi_{n-2}\left(x_{n-3},\ x_{n-2}\right) + R_1\left(x_{n-2},\ x_n^*\right)\right]$$

$$x_{n-2}^{\text{опт}} = x_{n-2}^{\text{опт}}\left(x_{n-2},\ x_n^*\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_{n-1}\left(x_0,\ x_n^*\right) = \max_{x_1}\left[\varphi_1\left(x_0,\ x_1\right) + R_{n-2}\left(x_1,\ x_n^*\right)\right]$$

$$x_1^{\text{опт}} = x_1^{\text{опт}}\left(x_0,\ x_n^*\right)$$

$$R_n\left(x_n^*\right) = \max_{x_0} R_{n-1}\left(x_0,\ x_n^*\right)$$

$$x_0^{\text{опт}} = x_0^{\text{опт}}\left(x_n^*\right) = x_0^*$$

На втором этапе оптимальные связи рассчитывают по формулам

$$x_1^* = x_1^{\text{опт}}\left(x_0^*,\ x_n^*\right)$$

$$x_2^* = x_2^{\text{опт}}\left(x_1^*,\ x_n^*\right) \qquad \text{(III, 111)}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}^* = x_{n-1}^{\text{опт}}\left(x_{n-2}^*,\ x_n^*\right)$$

Как и ранее, оптимальные связи можно определить графическим способом.

В том случае, когда ни вход, ни выход системы не заданы, безразлично, с конца или начала технологической цепочки начинать расчет. Однако при этом вход системы x_0 [формулы (III, 101)—(III, 103)] или ее выход x_n [формулы (III, 110)] являются функциями, а не заданными числами. Это вдвое увеличивает размерность задачи, которую надо решать на каждом этапе оптимизации.

Рассмотрим пример решения задачи координации в последовательной системе.

Пример. В аммиачиом производстве [12] аммиак синтезируется из азота воздуха и водорода. Водород получают путем высокотемпературиой коиверсии метана. Производство состоит из четырех последовательно соедииеииых цехов: конверсии метана, компрессии, очистки и синтеза. Необходимые даиные о производстве приведены в табл. 2.

Конвертированный газ, состоящий из азота, водорода, углекислого газа и остатков окиси углерода и метана, после цеха коиверсии сжимается до 28 *ат* н поступает иа водиую очнстку от углекислого газа.

Затем газ возвращается в цех компрессни и подвергается сжатию до 125 *ат*. После медно-аммиачиой очистки от окиси углерода газ сжимают до 300 *ат* й подают в цех синтеза.

ТАБЛИЦА 2

Характеристики цехов аммиачного производства

№ участка	Цех	Наименование параметра	Условное обозначение	Единица измерения	Пределы измерения	Функция цели (затраты)
1	Синтеза аммиака	Давление газа	P_3	*ат*	280—320	$\varphi_1 (P_3, t, \mu)$ (рис. 26, *а*)
		Содержание метана в газе	t	%	0,1—1	
		Содержание окиси углерода в газе	μ	млн. доли	20—100	
2	Компрессии (третья ступень)	Давление газа на входе	P_2	*ат*	120—130	$\varphi_2 (Q_1, P_2, P_3)$
		Давление газа на выходе	P_3	*ат*	280—320	
		Количество газа	$Q_1 (t)$	*м³/ч*	—	
3	Медно-аммиачной очистки	Содержание окиси углерода до очистки	ν	%	2—5	$\varphi_3 (Q_2, \mu, \nu, P_2)$ (рис. 26, *б*)
		Содержание окиси углерода после очистки	μ	млн. доли	20—100	
		Количество газа	$Q_2 = Q_1$	*м³/ч*	—	
4	Компрессии (вторая ступень)	Давление газа на входе	P_1	*ат*	21—30	$\varphi_4 (Q_3, P_1, P_2)$
		Давление газа на выходе	P_2	*ат*	120—130	
		Количество газа	$Q_3 = \frac{Q_2}{1 - \nu/100}$	*м³/ч*	—	
5	Водной очистки	Давление газа	P_1	*ат*	25—30	$\varphi_5 (Q_4, P_1, q)$ (рис. 26, *в*)
		Содержание двуокиси углерода до очистки	q	%	20,5—21,5	
		Количество газа	$Q_4 = Q_3$	*м³/ч*	—	
6	Компрессии (первая ступень)	Давление газа на выходе	P_1	*ат*	25—30	$\varphi_6 (Q_5, P_1)$ (рис. 26, *г*)
		Количество газа	$Q_5 = \frac{Q_4}{1 - \frac{q}{100}}$	*м³/ч*	—	
7	Конверсии метана и окиси углерода	Содержание метана	t	%	0,1—1	$\varphi_7 (Q_6, t, \nu)$ (рис. 26, *д*)
		Содержание окиси углерода	ν	%	2—4	
		Количество газа	$Q_6 = Q_5$	*м³/ч*	—	
		Содержание двуокиси углерода	$q(t, \nu)$	%	20,5—21,5	

Задача оптимизации ставится следующим образом: определить оптимальные связи в производстве, обеспечивающие минимальные затраты при заданном выходе продукции.

Для определения оптимальных связей между цехами цех компрессии условно разделен на три ступени от 0 до 28 *ат*, от 28 до 125 *ат*, от 125 до 300 *ат*, а цех очистки — на водную и медно-аммиачную очистку.

В результате все производство можно представить в виде одной последовательной цепочки (рис. 25).

Рассмотрим процесс расчета.

Затраты в первом от конца процесса цехе (цехе синтеза аммиака) зависят от давления газа, поступающего на синтез, от содержания в нем инертных примесей (в основном метана) и примесей, отравляющих катализатор (в основном окиси углерода). График функции φ_1 цеха синтеза в области, заданной технологическими ограничениями, приведен на рис. 26, *а* (заданный выход аммиака (M) составляет 5 *т/ч*).

Затраты во втором от конца процесса участке — на третьей ступени компрессии — зависят от количества газа, сжимаемого компрессором, и от давления газа на входе и выходе участка. Количество сжимаемого газа определяется из уравнения материального баланса цеха синтеза.

Первый шаг оптимизации направлен на определение оптимальной связи между цехом синтеза и третьей ступенью компрессии (давления P_3)

$$R_2(P_2, t, \mu) = \min_{P_3} [\varphi_2(Q_1, P_2, P_3 + R_1(P_3, t, \mu)]$$

В результате первого шага определяем $R_2(P_2, t, \mu)$ и оптимизирующую связь $P_3^{\text{опт}}(P_2, t, \mu)$.

Затраты в третьем от конца процесса цехе (цехе медно-аммиачной очистки газа) зависят от содержания окиси углерода в газе до его очистки ν, после его очистки μ и от давления очистки P_2. Второй шаг оптимизации направлен на определение связи между цехом медно-аммиачной очистки и последующими цехами производства (содержание окиси углерода после очистки)

CH$_4$
Конверсия метана
O$_2$
Разделение воздуха
Компрессия
28ат
125ат
300ат
Водная очистка
Медно-аммиачная очистка
Синтез аммиака
NH$_3$

Рис. 25. Схема аммиачного производства.

$$R_3(P_2, t, \nu) = \min_{\mu} [\varphi_3(Q_2, \mu, \nu, P_2) + R_2(P_2, t, \mu)]$$

$$\mu = \mu^{\text{опт}}(P_2, t, \nu)$$

График функции φ_3 приведен на рис. 26, *б*.

Далее аналогичным образом присоединяются участки компрессии второй ступени, водной очистки и компрессии первой ступени. Функции цели цехов водной очистки и компрессии (I ступень) приведены на рис. 26, *в*, *г*. Функции R_i, соответствующие этапам решения, сведены в табл. 3.

На последнем этапе оптимизации присоединяем первый от начала процесса цех (цех конверсии метана) и определяем оптимальные значения

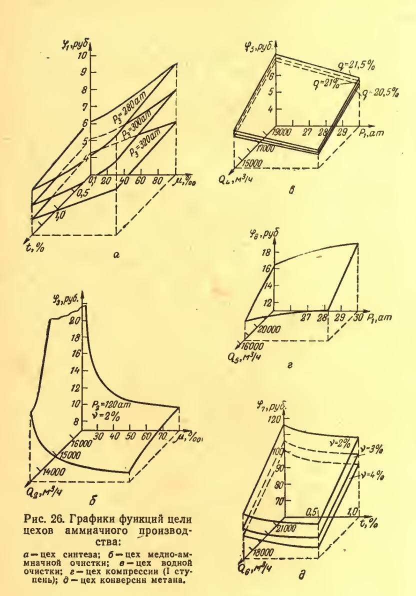


Рис. 26. Графики функций цели цехов аммиачного производства:

а — цех синтеза; *б* — цех медно-аммиачной очистки; *в* — цех водной очистки; *г* — цех компрессии (I ступень); *д* — цех конверсии метана.

ТАБЛИЦА 3

Этапы решения задачи координации

R_i	Дополнительные условия	Оптимизирующая связь
$R_1(P_3, t, \mu) = \varphi_1(P_3, t, \mu)$	—	—
$R_2(P_2, t, \mu) = \min\limits_{P_3} [\varphi_2(Q_1, P_2, P_3) + R_1(P_3, t, \mu)]$	$Q_1 = Q_1(t)$	$P_3^{опт}(P_2, t, \mu)$
$R_3(P_2, t, \nu) = \min\limits_{\mu} [\varphi_3(Q_2, \mu, \nu, P_2) + R_2(P_2, t, \mu)]$	$Q_2 = Q_1$	$\mu^{опт}(P_2, t, \nu)$
$R_4(P_1, t, \nu) = \min\limits_{P_2} [\varphi_4(Q_3, P_1, P_2) + R_3(P_2, t, \nu)]$	$Q_3 = Q_3(Q_2, \nu)$	$P_2^{опт}(P_1, t, \nu)$
$R_5(P_1, t, \nu, q) = \varphi_5(Q_4, P_1, q) + R_4(P_1, t, \nu)$	$Q_4 = Q_3$	—
$R_6(t, \nu, q) = \min\limits_{P_1} [\varphi_6(Q_5, P_1) + R_5(P_1, t, \nu, q)]$	$Q_6 = Q_5(Q_4, q)$	$P_1^{опт}(t, \nu, q)$
$R_7 = \min\limits_{t, \nu} [\varphi_7(Q_6, t, \nu) + R_6(t, \nu, q)]$	$Q_6 = Q_6$ $q = q(t, \nu)$	t^*, ν^*

содержания метана t и окиси углерода ν на выходе из цеха. Функция цели цеха конверсии приведена на рис. 26, *д*

$$R_7 = \min_{t, \nu} [\varphi_7(Q_6, t, \nu) + R_6(t, \nu, q)]$$

$$Q_6 = Q_6^{опт}(q, t, \nu)$$

$$q = q^{опт}(t, \nu)$$

Содержание углекислого газа q определяется из материального баланса цеха.

Полученные оптимальные значения t^* и ν^* используются для последовательного расчета остальных связей

$$\begin{aligned} q^* &= q^{опт}(t^*, \nu^*) \\ P_1^* &= P_1^{опт}(t^*, \nu^*, q^*) \\ P_2^* &= P_2^{опт}(P_1^*, t^*, \nu^*) \\ \mu^* &= \mu^{опт}(P_2^*, t^*, \nu^*) \\ P_3^* &= P_3^{опт}(P_2^*, t^*, \mu^*) \end{aligned} \qquad \text{(III, 112)}$$

Результаты оптимизации сведены в табл. 4. По сравнению с затратами, соответствующими номинальному режиму, экономия составляет 8,5%.

ТАБЛИЦА 4

Оптимальные связи

Режим	CH_4 % t	CO, %₀ v	Давление			CO, ‰ μ	Затраты на 5 т, %
			P_1	P_2	P_3		
Номииальный	0,5	4	28	125	300	40	100
Оптимальиый	0,1	4	30	130	320	60	91,5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ АГРЕГАТОВ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

На рис. 4 изображена последовательность аппаратов с обратной связью (рециклом). Обозначим вектор входа в i-тое звено через x_{i-1}, а вектор выхода — через x_i. Общий вход системы обозначим через x_f, а выход через x_q. Тогда уравнения обратной связи (I, 3) примут вид:

$$x_0 = x_f + \alpha x_n$$
$$x_q = (1 - \alpha) x_n \qquad \text{(III, 113)}$$

где α — степеиь рециркуляции.

Задача управления ставится следующим образом: найти координацию нагрузок, обеспечивающую максимум функции цели

$$\max \Phi = \max \sum_{i=1}^{n} \varphi_i (x_{i-1}, x_i) \qquad \text{(III, 114)}$$

при условиях

$$x_0 = x_f + \alpha x_n$$
$$x_q = (1 - \alpha) x_n \qquad \text{(III, 115)}$$
$$m_i \leqslant x_i \leqslant M_i$$

Необходимо отметить, что оптимизация последовательности аппаратов с рециклом может быть в ряде случаев легко сведена к оптимизации последовательности аппаратов без рецикла [57]. Если входные и выходные переменные схемы независимы, то решают задачу оптимизации для соответствующей разомкнутой схемы с независимыми входом и выходом, а затем определяют значения входных и выходных переменных по формулам

$$x_q = (1 - \alpha) x_n$$
$$x_f = x_0 - \alpha x_n \qquad \text{(III, 116)}$$

В том случае, когда входные и выходные переменные x_f и x_q заданы, задача оптимизации сводится к оптимизации разомкну-

той схемы с заданными входом и выходом, определяемыми по формулам

$$x_0^* = x_f^* + \frac{1}{1-\alpha} x_q^*$$
$$x_n^* = \frac{x_q^*}{1-\alpha} \qquad \text{(III, 117)}$$

Очевидно, что если входные переменные свободны, а выходные заданы, задача оптимизации тоже сводится к оптимизации соответствующей разомкнутой схемы.

Однако чаще встречающийся вариант, при котором входные переменные заданы, а выходные свободны, не сводится к задаче оптимизации соответствующей разомкнутой схемы.

Как и в предыдущем случае, для решения этой задачи могут быть использованы методы динамического программирования, принцип максимума и др.

Расчет связей может производиться по методу разрыва обратных связей. Идея этого метода заключается в том, что обратную связь мысленно разрывают, величины $x_0, x_1, \ldots, x_n$ считают независимыми переменными, а уравнение связи — ограничением в форме равенства, наложенным на варьируемые параметры. Далее расчет ведется по какому-либо методу, применимому для расчета последовательных систем с ограничениями.

Рассмотрим, например, как решается задача управления системой последовательных аппаратов с обратной связью при использовании различных методов динамического программирования.

Задача управления системой с рециклом решалась методом динамического программирования в работах Миттена и Немхаузера[58], Ван-Кавенберга[55], Розена[59] и др.

Пусть вход системы x_f^* известен. Задаемся выходом системы последовательных агрегатов x_n^0 и проводим расчет оптимального управления от конца к началу системы по обычным рекурентным формулам динамического программирования так же, как производился расчет для системы последовательных аппаратов. На последних этапах получаем

$$R_n\left(x_0, x_n^0\right) = \max_{x_1}\left[\varphi_1(x_1, x_0) + R_{n-1}\left(x_1, x_n^0\right)\right] \qquad \text{(III, 118)}$$
$$R_{n+1}\left(x_n^0\right) = \max_{x_0} R_n\left(x_0, x_n^0\right)$$

Рассчитанное на последнем этапе значение входной переменной x_0^0 не удовлетворяет уравнению связи

$$\alpha x_n^0 + x_f^* \neq x_0^0 \qquad \text{(III, 119)}$$

Повторяем расчет, задаваясь новыми значениями x_n до тех пор, пока уравнение связи (III, 119) не будет выполняться.

Как отмечалось, весьма эффективен расчет по методу динамического программирования с разрывом обратной связи. При этом уравнения связи (III, 113) используются как ограничения. Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, составляют новую целевую функцию

$$\Phi^* = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i (x_{i-1}, x_i) + \lambda [x_0 - x_f - \alpha x_n] \qquad (III, 120)$$

Расчет производится по методу динамического программирования для различных значений неопределенного множителя Лагранжа λ. В результате получают $\Phi^* (\lambda)$, $x_0 (\lambda)$, $x_1 (\lambda)$ и т. д., а затем выбирают такое λ, при котором удовлетворяется уравнение связи

$$\alpha x_n (\lambda) + x_f^* = x_0 (\lambda) \qquad (III, 121)$$

В ряде работ [60, 61, 62] для оптимизации системы с рециклом использовался дискретный принцип максимума.

Методы управления разветвленными комплексами более сложной структуры описаны в работах Плискина [63, 65], Островского [57, 66] и других авторов [64, 52].

ГЛАВА IV

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ АГРЕГАТАМИ

Впервые задачи распределения нагрузок были поставлены и решены в энергетике. Постановка задачи распределения в химической промышленности имеет ряд особенностей.

Оперативное перераспределение нагрузок в энергетике необходимо в первую очередь потому, что электрическая нагрузка электростанции значительно изменяется в течение суток, недели, по сезонам (до 100% на станциях, воспринимающих пиковую нагрузку). В непрерывном химическом производстве изменения нагрузки в течение суток, как правило, невелики. Они связаны с отключением тех или иных агрегатов для ремонта и не превышают 20—30% общей нагрузки производства. С другой стороны, химическое производство нуждается в оптимальном распределении вследствие нестабильности характеристик агрегатов во времени, определяемой засорением аппаратов, отложением на их поверхностях продуктов реакции и т. д. В особенности это относится к каталитическим реакторам, где активность катализатора значительно изменяется с течением времени. Специфика постановки задачи распределения нагрузок в химической промышленности заключается также в том, что очень часто необходимо решать многомерную задачу распределения, так как одновременно необходимо либо распределять несколько ресурсов, либо обеспечивать как заданную нагрузку, так и заданное качество продуктов.

Как отмечалось, первые работы по распределению нагрузок между параллельными агрегатами были начаты в энергетике (см. статьи Сахарова [33], Иванова [34], Невского [67], Шифринсона [68] и других авторов, в которых рассматривался вопрос о распределении нагрузок между различными энергетическими агрегатами). Систематическое изложение методов наивыгоднейшего распределения нагрузок между параллельными агрегатами и построения энергетических характеристик содержится в монографиях Стенберга и Смита [69], Болотова [7], Горнштейна [8] и диссертации Степанова [70]. Во всех перечисленных работах используется принцип равенства производных затрат по нагрузке, называемой рядом авторов принципом равенства относительных приростов.

Число работ, посвященных вопросу распределения нагрузок между параллельными аппаратами в химической промышленности, пока невелико. Впервые в отечественной литературе задача распределения нагрузок между параллельными агрегатами в химической промышленности была поставлена в статье Либермана [71], отметившего необходимость распределения нагрузки и качества между параллельными агрегатами.

Задача распределения нагрузок между реакторами с катализатором различной активности рассматривается в статье [72]. В статье Робертса [45], а также в его монографии [73] для решения задачи распределения нагрузок между реакторами используется метод динамического программирования. В работе Коттера [74] подробно рассматривается задача распределения нагрузок между конкретными промышленными аппаратами с помощью метода наискорейшего спуска и метода динамического программирования. Приводятся подробно разработанные примеры распределения нагрузок газовых компрессоров и теплообменников.

Необходимо отметить, что во всех перечисленных работах специфический вид зависимостей, характерный для химической промышленности, не учитывался. Авторы решают задачу для характеристик произвольного вида, либо ограничиваются предположениями об их выпуклости, вогнутости или линейности. Следствием этого является необходимость предварительного весьма точного исследования характеристик всех агрегатов во всем диапазоне изменения нагрузок. В условиях химической промышленности, где рабочие режимы аппаратов часто нестабильны и характеристики существенно изменяются с течением времени, проведение подобных исследований достаточно сложно и дорого. Кроме того, даже при наличии точных и достоверных характеристик для решения задачи распределения необходимы достаточно сложные математические методы, обусловливающие применение цифровых или специализированных аналоговых устройств.

Между тем, как будет показано в настоящей главе и главе V, исследование специфического вида зависимостей $y_i(x_i)$ для различных аппаратов химической промышленности позволяет существенно упростить решение задачи распределения нагрузок и, что особенно важно, уменьшить потребность в априорной информации.

Как было показано в главе III, метод и алгоритм решения задачи распределения определяется видом характеристик агрегатов. В свою очередь, вид характеристики агрегата в большой степени определяется характером процессов, происходящих в агрегате, и конструкцией аппаратов. В настоящей главе, а также в главе V, будут рассмотрены особенности постановки задачи распределения для различных аппаратов химической промышленности. Будут проанализированы характеристики типового

оборудования и аппаратов: насосов, компрессоров, теплообменных и массообменных аппаратов и химических реакторов.

Хотя характеристики отдельных аппаратов зависят от большого количества факторов и могут изменяться в достаточно широких пределах, все же вид характеристик, т. е. их выпуклость или вогнутость, как правило, определяется характером технологического процесса, поэтому можно предложить определенные алгоритмы распределения нагрузок для агрегатов определенного типа.

НАСОСЫ

Насосы различных конструкций чрезвычайно широко распространены в химической промышленности. Часто для обеспечения большей производительности несколько насосов работают на общий коллектор.

Основными характеристиками насосов являются производительность Q и напор H. Напор, создаваемый насосом, тратится на подъем жидкости на высоту $H_г$ и преодоление гидравлического сопротивления трубопровода $H_с$.

Гидравлическое сопротивление трубопровода пропорционально квадрату нагрузки

$$H_с = rQ^2 \qquad \text{(IV, 1)}$$

На рис. 27 приведено несколько зависимостей общего сопротивления потребителя от нагрузки.

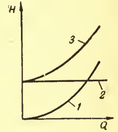


Рис. 27. Зависимость общего сопротивления потребителя от нагрузки:

1 — при длинном горизонтальном трубопроводе; *2* — при коротком трубопроводе и большой высоте подъема; *3* — в общем случае.

Полный напор насоса должен быть равен сопротивлению потребителя

$$H = H_г + rQ^2 \qquad \text{(IV, 2)}$$

Условие (IV, 2) является дополнительным ограничением, которое должно соблюдаться при решении задачи распределения нагрузок между насосами.

В зависимости от принципа действия различают объемные насосы (поршневые и роторные), центробежные, вихревые, струйные и т. д. Большое промышленное значение имеют центробежные и поршневые насосы [75].

Центробежные насосы

Особенностью центробежных насосов является наличие ярко выраженной зависимости между производительностью насоса Q и создаваемым напором H. Теоретически эту зависимость выводят из основного уравнения центробежного насоса (уравнение Эйлера) [76].

Уравнение Эйлера является следствием закона сохранения энергии во входном и выходном сечениях колеса. Согласно этому

уравнению, напор, создаваемый насосом, зависит от скорости вращения колеса, его радиуса и угла наклона направляющих лопаток. Для наиболее часто применяемых конструкций

$$H_{\text{т}} = \frac{1}{g} uc \tag{IV, 3}$$

где u — окружная скорость колеса, *м/сек*; c — проекция скорости выхода жидкости из колеса на окружную скорость u; $g = 9{,}8$ *м/сек²*.

Проекция скорости выхода жидкости из колеса насоса на окружную скорость u определяется выражением

$$c = u - \frac{Q \operatorname{ctg} \beta}{\pi D B} \tag{IV, 4}$$

где Q — производительность насоса; D — внешний диаметр колеса; B — ширина колеса; β — угол, под которым направляющая лопатка пересекает окружность колеса.

Подставляя формулу (IV, 3) в выражение (IV, 4), получаем зависимость напора от производительности

$$H_{\text{т}} = \frac{u}{g}\left(u - \frac{Q \operatorname{ctg} \beta}{\pi D B}\right) = A - BQ \tag{IV, 5}$$

Теоретическая мощность насоса

$$N_{\text{т}} = \gamma Q H_{\text{т}} \tag{IV, 6}$$

Откуда

$$N_{\text{т}} = \gamma Q (A - BQ)$$

где γ — удельный вес жидкости.

Дифференцируя дважды по Q, получаем

$$\frac{d^2 N_{\text{т}}}{dQ^2} = -2\gamma B < 0 \tag{IV, 7}$$

Неравенство показывает, что зависимость теоретической мощности насоса от его производительности выражается выпуклой кривой.

Вследствие потерь напора в насосе практически зависимость напора насоса от его производительности представляет собой не прямую (IV, 5), а выпуклую кривую H (рис. 28). Эта кривая, называемая рабочей характеристикой насоса, для каждого насоса определяется экспериментально. Действительные затраты электроэнергии в приводе насоса N определяются по формуле

$$N = \frac{\gamma Q H}{\eta} \tag{IV, 8}$$

где η — к. п. д. установки.

Хотя экспериментально определяемая зависимость существенно отличается от теоретической, обычно она, так же как и теоретическая, имеет выпуклую форму (см. кривую N на рис. 28).

Рабочий режим насоса определяется его рабочей характеристикой и сопротивлением потребителя. На рис. 29 построена рабочая характеристика насоса (кривая *I*) и характеристика потребителя (кривая *II*). Точка пересечения этих характеристик *A* определяет рабочую нагрузку и напор центробежного насоса.

Регулировать производительность центробежного насоса можно изменением числа его оборотов либо дросселированием потока с помощью задвижки. В принципе дросселирование возможно и на всасе и на нагнетании насоса. Однако при дросселировании на всасе давление внутри насоса уменьшается. Если

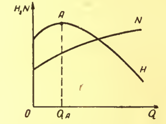


Рис. 28. Характеристики центробежного насоса.

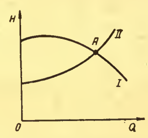


Рис. 29. Определение рабочей точки центробежного насоса.

оно станет равным давлению насыщенных паров жидкости, наступит явление кавитации — образуется пар, выделяется растворенный в жидкости воздух. В результате резко падает производительность и к. п. д. насоса, возникают удары. Поэтому для регулирования производительности центробежного насоса пользуются дросселированием потока на нагнетании.

Наиболее экономичный вид регулирования — изменение числа оборотов двигателя, особенно удобен, если в качестве привода используется паровая машина или двигатель внутреннего сгорания. Электродвигатели постоянного тока также позволяют легко изменять число оборотов, однако их применение ограничивается необходимостью в специальных преобразователях. Двигатели переменного тока с регулируемым числом оборотов весьма сложны по конструкции. Поэтому практически почти всегда применяется менее экономичный, но более простой метод регулирования путем дросселирования потока на нагнетании.

Для построения суммарной характеристики нескольких параллельных насосов необходимо сложить абсциссы характеристик, соответствующие точкам с одинаковыми напорами. Пересечение суммарной характеристики с характеристикой трубопровода определяет общую производительность и напор системы.

Оптимальное распределение нагрузок между параллельными насосами должно обеспечить заданную производительность при минимальных затратах электроэнергии.

Задача распределения ставится в следующем виде:

найти нагрузки $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, минимизирующие затраты электроэнергии

$$\min \sum_{i=1}^{n} N_i(Q_i) \qquad \text{(IV, 9)}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = Q_0 \qquad \text{(IV, 10)}$$

Кроме того, необходимо учесть два дополнительные ограничения: во-первых, напор, создаваемый каждым насосом, должен быть не меньше сопротивления трубопровода

$$H_i(Q_i) \geqslant H(Q_0) = H_\text{г} + rQ_0^2 \qquad \text{(IV, 11)}$$

Условие (IV, 11) ограничивает максимальную нагрузку насоса. В данном случае максимальная допустимая нагрузка насоса зависит от общей нагрузки системы

$$Q_i \leqslant Q_{i\,\max}(Q_0) \qquad \text{(IV, 12)}$$

Во-вторых, минимальная нагрузка насоса также ограничена. Если характеристика насоса $H(Q)$ имеет экстремум — точку A (см. рис. 28), то устойчивая работа обеспечивается только при нагрузках, больших Q_A. При $Q < Q_A$ небольшое случайное уменьшение производительности приведет к уменьшению создаваемого напора H и, следовательно, к еще большему падению производительности. Поэтому минимальная нагрузка насоса определяется из условия

$$Q_i \geqslant Q_{i\,\min}$$
$$Q_{i\,\min} > Q_{iA} \qquad \text{(IV, 13)}$$
$$\left(\frac{dH}{dQ}\right)_{Q_A} = 0$$

Как было указано выше, закон распределения нагрузок определяется видом характеристики.

Так как зависимость потребляемой мощности от нагрузки центробежных насосов имеет выпуклую форму, для оптимального распределения нагрузок между ними следует:

При одинаковых типах насосов *— снижать нагрузку на одном произвольно выбранном насосе, начиная с максимально допустимой; после полной его разгрузки разгружать следующий и т. д.*

При разных типах насосов *— максимально нагружать одни насосы, минимально нагружать другие, полностью останавливать третьи и частично загружать один из насосов. Если общая нагрузка близка к максимальной, снижать следует нагрузку того насоса, производная характеристики затрат которого dN/dQ имеет наибольшее значение.*

На рис. 30 показаио распределение нагрузок между тремя одинаковыми насосами [77].

Как видно на рис. 30, *а* максимальная общая иагрузка определяется по пересечению суммарной характеристики иасосов с характеристикой потребителя (точка *А*). При этом нагрузки всех иасосов равиы $\left(Q'_I = Q'_{II} = Q'_{III} = 8{,}2\ л/сек\right)$. Закроем задвижку на иагнетании третьего насоса. Его производительность уменьшится (см. участок $A'B''$, рис. 30, *в*). Умеиьшеиие общей нагрузки приводит к падению сопротивления потребителя; нагрузки остальных двух насосов автоматически возрастают (участок $A'B'$, рис. 30, *в*). По достижении минимальной допустимой нагрузки третьего насоса, составляющей 2,5 *л/сек* (точка B''), сиизим нагрузку второго насоса (участок $B'C''$). Нагрузка в 20,8 *л/сек* (рис. 30, *а*, точка *С*) и меиьше может быть обеспечена двумя насосами. Выключаем третнй насос, а нагрузку второго сиижаем с помощью дросселирования до минимально допустимой величины (рис. 30, *в*, точка $Д''$). Тем временем производительность первого насоса возрастает (точка $Д'$). Далее с помощью дросселирования снижаем производительность первого насоса до 13 *л/сек*. Эта нагрузка может быть обеспечена одиим иасосом. Выключаем второй насос, а производительность первого снижаем до 2,5 *л/сек* (точка *F*).

Таким образом, при уменьшеиии общей нагрузки в рабочем интервале минимальные затраты электроэнергии (рнс. 30, *г*) можно обеспечить последовательным снижением нагрузок иасосов (рис. 30, *в*).

На рис. 31 показано распределение иагрузок между двумя насосами разных типов. Рабочие характеристики и характеристика сопротивления потребителя приведены на рис. 31, *а*. Пересечение суммарной характеристики и кривой сопротивлеиия потребителя (точка *А*) определяет максимальиую возможиую нагрузку двух иасосов, равную 19,6 *л/сек*. При этом производительиость первого иасоса составляет 6,2 *л/сек* (точка α), второго — 13,4 *л/сек* (точка β). На рис. 31, *в* точка A' соответствует максимальной нагрузке первого насоса, точка A'' — второго насоса. Производные затрат по нагрузке в этих точках (точки α', β', рис. 31, *б*) соответственно равны

$$\frac{\partial N}{\partial Q_I} = 0{,}28\,\frac{квт}{л/сек} \qquad \frac{\partial N}{\partial Q_{II}} = 0{,}16\,\frac{квт}{л/сек}$$

Так как производиая затрат по нагрузке для первого иасоса больше, снижаем нагрузку первого насоса до мииимальио допустимой величины 2,5 *л/сек* (точка B', рис. 31, *в*). При этом иагрузка второго насоса автоматически возрастает до 5,6 *л/сек* (точка B''). Затем снижают иагрузку второго насоса до величины 17,2 *л/ч* (участок $B''C''$). Эта, а также более низкая нагрузка может быть обеспечена одним вторым насосом (участок $C'Д'$). В иитервале от 12,2 до 2,5 *л/сек* иагрузка обеспечивается одним первым насосом (участок $D'E'$).

Поршневые насосы

Поршневые насосы широко применяются в химической промышленности, так как имеют простую конструкцию, высокий к. п. д., а также обеспечивают высокие напоры при любых, даже незначительных, подачах.

Производительность поршневого насоса определяется количеством жидкости, всасываемой насосом за один шаг, и числом ходов поршня в 1 *мин* [78]

$$Q = \frac{FSni}{60}\ м^3/сек \qquad (IV, 13а)$$

где *F* — площадь поперечиого сечеиия поршия, $м^2$; *S* — длина хода поршня, *м*; *i* — количество рабочих камер; *n* — число ходов поршия в 1 *мин.*

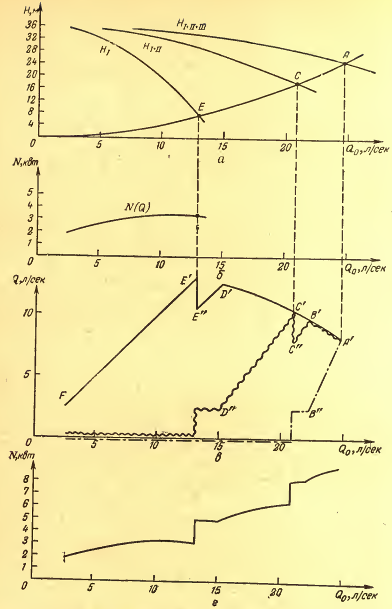


Рис. 30. Распределение нагрузок между тремя однотипными насосами:
а — рабочие характеристики одного (H_I), двух (H_{I+II}) и трех ($H_{I+II+III}$) параллельно работающих насосов; *б* — мощность, потребляемая насосом; *в* — оптимальное распределение: ——— насос *I*; 〰〰 насос *II*; —·—·— насос *III*; *г* — общая мощность, потребляемая насосами.

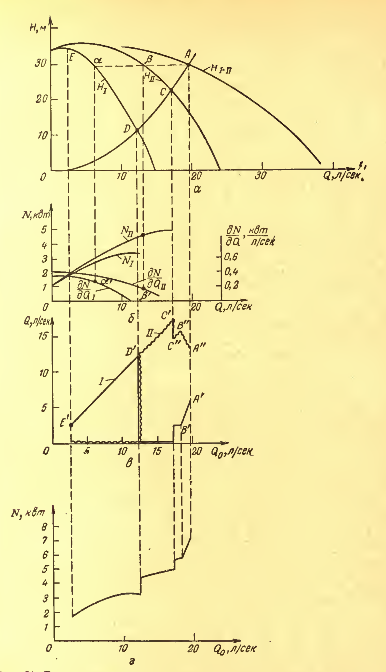


Рис. 31. Распределение нагрузок между двумя насосами разных типов:
а — рабочие характеристики первого насоса (H_I), второго насоса (H_{II}) и двух параллельно работающих насосов (H_{I+II}); *б* — мощность, потребляемая насосами; *в* — оптимальное распределение нагрузок: ——— насос *I*; ∿∿∿ насос *II*; *г* — общая мощность, потребляемая насосами.

В отличие от центробежного насоса напор, создаваемый поршневым насосом, практически не зависит от его производительности (рис. 32).

Теоретически мощность насоса линейно зависит от производительности

$$N_{т} = QH\gamma \qquad (IV, 14)$$

где γ — удельный вес жидкости, *кгс/м³*.

В действительности в насосе имеются механические потери, возрастающие с нагрузкой. Учитывая механические потери,

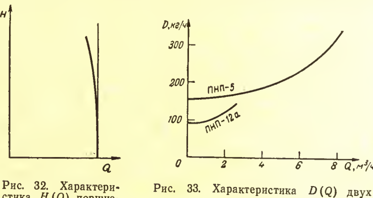


Рис. 32. Характеристика $H(Q)$ поршневого насоса.

Рис. 33. Характеристика $D(Q)$ двух паровых насосов.

к. п. д. двигателя и гидравлические потери, зависимость мощности, потребляемой насосом от нагрузки, можно представить в виде

$$N = \frac{QH\gamma}{\eta} \qquad (IV, 15)$$

где η — полный к. п. д. насоса.

Производительность поршневого насоса почти не зависит от напора, следовательно, ее изменение может происходить за счет изменения числа ходов или длины хода поршня, либо за счет перепусков. Регулировать производительность поршневых насосов можно по-разному, в зависимости от типа двигателя. Наиболее просто (снижением подачи пара в цилиндр паровой машины) эта задача решается для прямодействующих паровых насосов. При этом зависимость расхода пара от производительности может иметь линейную или вогнутую форму.

Рассмотрим закон распределения нагрузок для поршневых прямодействующих паровых насосов. Зависимости расхода пара от производительности $D(Q)$ для нескольких прямодействующих насосов изображены на рис. 33.

В главе III было показано, что оптимальное распределение нагрузок для достижения минимальных затрат между агрега-

тами с линейными характеристиками сводится к последовательной загрузке агрегатов в порядке возрастания наклона характеристик, а с вогнутыми характеристиками — к загрузке агрегатов в соответствии с принципом равенства производных затрат по нагрузке.

Поэтому правила распределения нагрузок для поршневых прямодействующих насосов могут быть сформулированы следующим образом:

*При **одинаковом** типе насосов и **линейных** характеристиках затрат распределение нагрузок безразлично.*

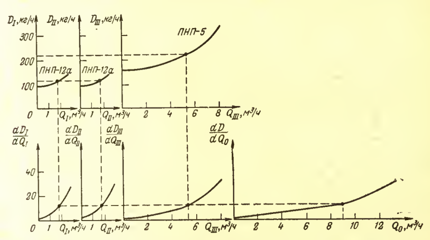


Рис. 34. Распределение нагрузок между насосами типа ПНП-5 и ПНП-12а графическим методом.

*При **разных** типах насосов и **линейных** характеристиках нагрузку следует распределять так, чтобы снижалась производительность насоса, имеющего наибольший наклон характеристики $N(Q)$.*

*При **одинаковом** типе насосов и вогнутых характеристиках затрат нагрузку следует распределять поровну.*

*При **разных** типах насосов и вогнутых характеристиках нагрузку следует распределять так, чтобы соблюдалось условие*

$$\frac{dN_1}{dQ_1}=\frac{dN_2}{dQ_2}= \dots =\frac{dN_n}{dQ_n} \qquad \text{(IV, 16)}$$

Поршневые насосы обычно применяются для создания высоких напоров. Потребители, обслуживаемые этими насосами, часто имеют характеристику, показанную на рис. 27 (кривая 2). В этом случае напор постоянен.

На рис. 34 показано распределение нагрузок между двумя насосами типа ПНП-5 и одним — типа ПНП-12а с помощью графического метода,

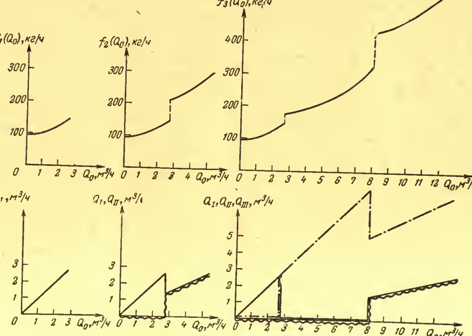


Рис. 35. Распределение нагрузок между насосами типа ПНП-5 и ПНП-12а методом динамического программирования:
—— насос *I*; ~~~~ насос *II*; —·—·— насос *III*.

описанного в главе III. При общей нагрузке $Q_0 = 9$ $м^3/ч$ оптимальным будет следующее распределение нагрузок: $Q_I = 1{,}8$ $м^3/ч$, $Q_{II} = 1{,}8$ $м^3/ч$, $Q_{III} = 5{,}4$ $м^3/ч$.

Если необходимо учесть возможность полной остановки одного или нескольких насосов, характеристики затрат будут представлять собой разрывные функции и распределение нагрузки между насосами может быть произведено методом динамического программирования. Пример подобного распределения для тех же насосов, что и на рис. 34, приведен на рис. 35. Здесь $f_1(Q_0)$, $f_2(Q_0)$, $f_3(Q_0)$ — затраты пара при оптимальном распределении нагрузок для одного, двух и трех насосов, соответственно. При высоких нагрузках $Q_0 > 8$ $м^3/ч$ результат распределения совпадает с предыдущим; при нагрузках от 8 до 2,7 $м^3/ч$ работает один насос ПНП-5; при нагрузке от 2,7 $м^3/ч$ до 0 — один насос ПНП-12а.

На рис. 36 показано распределение нагрузок между двумя насосами, один из которых (I) имеет линейную, а другой (II) — вогнутую характеристику $D(Q)$. В пределах от 31 $м^3/ч$ до 27 $м^3/ч$ насос I загружен полностью; снижение нагрузки производится на насосе II до точки, в которой касательная к характеристике этого насоса имеет тот же наклон, что линейная характеристика насоса I. Начиная с этой точки и вплоть до точки, соответствующей производительности 19 $м^3/ч$, нагрузка снижается на насосе I, а на насосе II поддерживается постоянная нагрузка, равная 8 $м^3/ч$. В интервале от 19 $м^3/ч$ до 2 $м^3/ч$ работает только насос I.

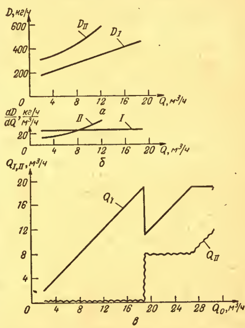


Рис. 36. Распределение нагрузок между насосами типа ПНП-3 и ПНП-10/50:

а — характеристики насосов; *б* — производные характеристик по нагрузке; *в* — оптимальные нагрузки: ——— насос I; ~~~~ — насос II.

КОМПРЕССОРЫ

Компрессоры являются основными потребителями энергии на установках высокого давления. Например, около 30% технологической себестоимости синтетического аммиака приходится на электроэнергию для компрессоров высокого давления; на установках разделения воздуха аналогичные затраты возрастают до 80%. Поэтому особенно важно оптимально распределить нагрузку между мощными компрессорами.

По принципу действия компрессоры, так же как и насосы, разделяются на центробежные, осевые, поршневые и ротационные. В отличие от насосов в компрессорах существенно изменяется термодинамическое состояние рабочей среды, поэтому рабочие характеристики компрессоров зависят от исходных

параметров сжимаемого газа. Особенно широко в химической промышленности применяются центробежные и поршневые компрессоры. Для сжатия больших количеств газа до 20 *ат* используются центробежные компрессоры (турбокомпрессоры); для получения более высоких давлений используются поршневые компрессоры, обеспечивающие сжатие до 1000 *ат*.

Рассмотрим подробнее особенности распределения нагрузок между центробежными и поршневыми компрессорами.

Центробежные компрессоры (турбокомпрессоры)

В турбокомпрессорах сжатие и нагнетание газа создается с помощью центробежной силы. Работа турбокомпрессора аналогична работе центробежного насоса с тем отличием, что при прохождении газа через колесо меняется плотность газа. Для создания малых давлений (до 1,15 *ат*) применяются одноступенчатые турбогазодувки с одним рабочим колесом, для больших давлений — многоступенчатые турбокомпрессоры с несколькими колесами разного размера [79, 80].

Характерными показателями, определяющими работу турбокомпрессора, являются весовая производительность компрессора Q_g, *кг/мин*; объемная производительность, приведенная к условиям всасывания Q, *м³/мин*; давление всасывания $P_в$ и давление нагнетания $P_н$; степень сжатия ε, равная отношению давления нагнетания к давлению всасывания, и мощность на валу компрессора N.

Зависимость степени сжатия от объемной производительности турбокомпрессора представляет собой выпуклую кривую, показанную на рис. 37. Абсцисса точки A, вершины характеристики, является нижней границей допустимых нагрузок турбокомпрессора: в области OA, так называемой области помпажа, работа компрессора неустойчива.

Мощность компрессора определяется по следующей формуле:

$$N = \frac{Q_g}{\eta} RT_в \frac{k}{k-1} \left[\varepsilon^{(k-1)/k} - 1\right] \qquad \text{(IV, 17)}$$

где R — газовая постоянная; $T_в$ — температура газа на входе; k — адиабатический показатель политропы; η — к. п. д.

Зависимость энергозатрат от нагрузки представляет собой выпуклую кривую, иногда с экстремумом (рис. 38). Зависимости $P_н(Q)$ и $N(Q)$, получаемые экспериментально, приводятся в каталогах турбокомпрессоров. Однако эти зависимости не могут быть использованы непосредственно для решения задачи распределения нагрузок. Вид характеристики $N(Q)$ зависит от способа регулирования производительности.

Регулировать производительность турбокомпрессора можно путем изменения числа оборотов двигателя, изменения положе-

ния направляющих лопаток компрессора или дросселирования потока на входе или на выходе.

Затруднения, связанные с первым методом регулирования, рассматривались ранее в разделе регулирования производительности насосов. Второй метод регулирования весьма экономичен, однако требует разработки специальных конструкций компрессоров. Практически регулирование центробежных компрессоров обеспечивается дросселированием. Выше было сказано, что при

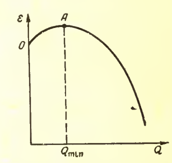


Рис. 37. Характеристика центробежного компрессора.

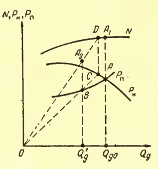


Рис. 38. Перестроенные характеристики центробежного компрессора при дросселировании на всасывании.

регулировании производительности насосов дросселировать следует поток в нагнетательном трубопроводе, так как дросселирование во всасывающем трубопроводе связано с опасностью кавитации. В турбокомпрессорах, напротив, применяется дросселирование во всасывающем трубопроводе, так как увеличение удельного объема всасываемого потока, связанное с падением давления, уменьшает расход энергии, а граница помпажа смещается влево.

При дросселировании на всасывании рабочие характеристики турбокомпрессора изменяются; объемная производительность остается неизменной, а весовая производительность, мощность и степень сжатия могут быть пересчитаны согласно формулам

$$Q'_g = \frac{P'_в}{P_в} Q_g$$

$$P'_н = \frac{P'_в}{P_в} P_н \qquad \text{(IV, 18)}$$

$$N' = \frac{P'_в}{P_в} N$$

Величины со штрихом относятся к режиму дросселирования.

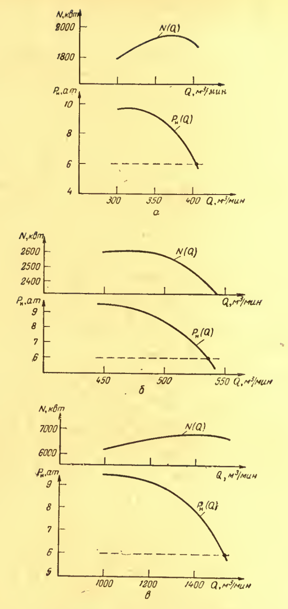


Рис. 39. Паспортные характеристики компрессоров типа:
а — *К*-350-61-1; *б* — *К*-500-61-2; *в* — *К*-1500-61-1.

Зависимость $N'(Q'_g)$ может быть построена графически, исходя из рабочей характеристики компрессора $P_н = P_н(Q_g)$, $N = N(Q_g)$ и характеристики потребителя (см. рис. 38).

Восставляя перпендикуляр из точки пересечения рабочей характеристики компрессора $P_н(Q_g)$ и характеристики потребителя $P_п(Q_g)$ (точка A) до характеристики $N(Q_g)$, находим первую точку искомой зависимости $N'(Q_g) = A_1$. Пусть вследствие дросселирования весовая производительность уменьшилась до величины Q'_g. Проведем прямую через начало координат и точку В [пересечение перпендикуляра, восставленного из точки Q'_g, с кривой $P_п(Q_g)$]. Точка пересечения C луча OB с кривой $P_н(Q_g)$ задает режим, подобный данному. Затраты мощности, соответствующие этому режиму, могут быть определены из подобных треугольников ODC и OA_2B. Точка A_2 — вторая точка искомой зависимости $N'(Q_g)$.

Таким образом, для распределения нагрузок между центробежными компрессорами, работающими параллельно, необходимо перестроить паспортные характеристики турбокомпрессоров.

Для оптимального распределения нагрузок необходимо произвести следующие операции:

При известной общей нагрузке системы Q_{g0} найти сопротивление потребителя $P_п(Q_{g0})$.

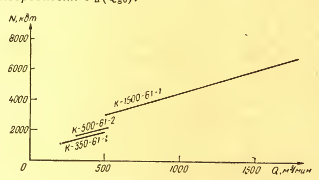


Рис. 40. Перестроенные характеристики компрессоров.

Определить рабочие характеристики компрессора при дросселировании, соответствующие сопротивлению потребителя $P_п(Q_{g0})$.

Определить границу помпажа $Q_{g\,min}$.

В зависимости от вида перестроенных характеристик решить задачу распределения нагрузок одним из методов, описанных в главе III.

Необходимо подчеркнуть, что перестроенные рабочие характеристики компрессора зависят от общей нагрузки Q_{g0}. Поэтому задачу распределения следует решать отдельно для каждого Q_{g0}.

В качестве примера рассмотрим систему распределения нагрузок между воздушными компрессорами цеха разделения воздуха химического комбината.

Четыре компрессора типа К-350-61-1, один — типа К-1500-61-1 и два — типа К-500-61-2 работают на коллектор сжатого воздуха под давлением 6 *ат*, питающий блоки разделения воздуха (см. гл. VIII). Паспортные характеристики компрессоров приведены на рис. 39.

Принимаем, что в рабочих пределах изменения нагрузки сопротивление потребителя не зависит от нагрузки и равно 6 *ат*. Перестроенные характеристики компрессоров приведены на рис. 40. Как видно из рисунка, окончательные характеристики линейны и имеют примерно одинаковые наклоны. Поэтому, несмотря на существенное различие и кривизну паспортных характеристик, распределение нагрузок между данными компрессорами безразлично.

Поршневые компрессоры

Теоретическая производительность поршневого компрессора равна объему, вытесняемому поршнем [81]

$$Q_т = \frac{FSni}{60}$$

где $Q_т$ — теоретическая производительность, *м³/мин*; i — число всасываний за один оборот вала; S — ход поршня, *м*; F — площадь поперечного сечения поршня, *м²*; n — число ходов поршня в 1 *мин*.

Объем газа, всасываемого компрессором, меньше объема, вытесняемого поршнем, так как в мертвом пространстве цилиндра остается сжатый газ.

Кроме того, при вычислении объема сжимаемого газа надо учитывать потери, возникающие вследствие неплотности клапанов, подогрева газа на входе в цилиндр и т. д.

Фактический объем сжимаемого газа, приведенный к условиям всасывания

$$Q = \lambda Q_т \qquad (IV, 19)$$

где λ — общий коэффициент подачи компрессора.

Значение λ определяют экспериментально; обычно оно не выходит из пределов 0,7—0,9.

Теоретическая работа сжатия ступени компрессора зависит от производительности компрессора, начального и конечного давления и условий сжатия

$$L_т = \frac{m}{m-1}\, p_в Q \left[\left(\frac{p_н}{p_в}\right)^{(m-1)/m} - 1\right]$$

где m — показатель политропы; $p_н$, $p_в$ — давления нагнетания и всасывания.

Действительная работа сжатия может быть определена только экспериментально: по индикаторной диаграмме компрессора

$$L_{инд} = \int P\,dQ$$

По замкнутому контуру индикаторной диаграммы производят графическое интегрирование. Индикаторная мощность компрессора

$$N_{инд} = \frac{L_{инд} i n}{60 \cdot 102} \text{ квт}$$

С учетом тепловых и механических потерь в компрессоре, к. п. д. двигателя и передачи мощность компрессорной установки

$$N = \frac{N_{\text{инд}}}{\eta} \qquad \text{(IV, 20)}$$

Изменять производительность поршневого компрессора можно путем воздействия на его привод, коммуникацию или клапаны [77, 78, 82].

Наиболее экономичный вид регулирования — изменение числа оборотов двигателя — применяется редко по тем же причинам, которые были указаны в разделе регулирования производительности поршневых насосов. Наиболее простой метод — дросселирование потока на всасывании — весьма неэкономичен. Обычно выгоднее бывает перепускать часть газа с выкида на всас через байпасный клапан, т. е. регулировать с помощью байпасирования.

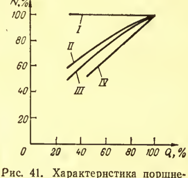


Рис. 41. Характеристика поршневого компрессора при разных способах регулирования:

I — байпасирование; *II* — дросселирование на всасывании; *III* — отжим клапанов; *IV* — изменение мертвого пространства.

Весьма экономичным способом изменения производительности компрессора является отжим всасывающих клапанов на части хода. Этот способ регулирования заключается в том, что к концу всасывания всасывающие клапаны принудительно задерживают в открытом состоянии, вследствие чего в начале обратного хода газ свободно выходит из цилиндра.

Применяются также другие способы: присоединение дополнительных полостей, увеличивающих объем мертвого пространства цилиндра, изменение хода поршня.

В зависимости от способа регулирования характеристики затрат поршневых компрессоров либо линейны, либо имеют выпуклую форму (рис. 41). Необходимо учесть, что в силу уменьшения к. п. д. электродвигателя с уменьшением нагрузки характеристики затрат могут принять более выпуклую форму. Поэтому для оптимального распределения нагрузок компрессоров, работающих на один коллектор, необходимо руководствоваться следующими правилами:

При одинаковых типах компрессоров *и регулировании производительности подключением дополнительных полостей или изменением хода поршня нагрузки можно распределять произвольно; при регулировании производительности дросселированием на всасывании или отжимом клапанов надо снижать нагрузку на одном, произвольно выбранном компрессоре.*

При разных типах компрессоров необходимо снижать нагрузку на том из них, у которого наклон характеристики затрат в области максимальных нагрузок больше.

ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

Конструкции теплообменных аппаратов, применяющихся в химической промышленности, чрезвычайно разнообразны[83, 84].

Весьма широко распространены теплообменники типа труба в трубе и кожухотрубчатые теплообменники. При необходимости передать значительное количество тепла несколько теплообменников часто объединяют коллекторами. В таких случаях перераспределение нагрузок между теплообменниками осуществляют с помощью регулирующих задвижек или клапанов.

Сформулируем варианты постановки задачи оптимального распределения нагрузок между параллельными теплообменными аппаратами в зависимости от цели распределения и налагаемых ограничений.

Вариант I. Найти распределение нагреваемого продукта $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и теплоносителя $L_1, L_2, \ldots, L_n$, обеспечивающее максимальную передачу тепла Q при заданном общем количестве нагреваемого продукта V_0 и теплоносителя L_0

$$\max \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \qquad \sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \tag{IV, 21}$$

Вариант II. Найти распределение нагреваемого продукта $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и теплоносителя $L_1, L_2, \ldots, L_n$, обеспечивающее максимальную среднюю температуру нагретого продукта $t_{\text{к. ср}}$ при заданном общем количестве нагреваемого продукта V_0 и теплоносителя L_0

$$\max t_{\text{к. ср}} = \max \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{ki} V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \qquad \sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \tag{IV, 22}$$

где $t_{\text{к}i}$ — температура нагретого продукта на выходе из i-того теплообменника.

Вариант III. Найти распределение нагреваемого продукта $V_1, V_2, \ldots, V_n$, обеспечивающее минимальный расход теплоно-

сителя L и заданную температуру нагреваемого продукта на выходе из системы теплообменников $t_{к.\,ср}$

$$\min L = \min \sum_{i=1}^{n} L_i$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \qquad t_{к.\,ср} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{кi} V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \qquad (IV, 23)$$

Задача оптимального распределения нагрузок между теплообменными аппаратами сложнее подобной задачи для аппаратов, рассмотренных ранее. Ее сложность обусловлена двумерностью распределяемого параметра, т. е. необходимостью определить оптимальное распределение как нагреваемого продукта, так и теплоносителя.

Будем рассматривать задачу распределения в первой постановке (вариант I), т. е. найдем распределение нагрузок, обеспечивающее максимальную передачу тепла. (Можно показать, что решение задачи распределения во всех трех постановках одинаково.)

Рассмотрим связь между количествами передаваемого тепла, нагреваемого продукта и теплоносителя для одного теплообменника. Передача тепла в теплообменнике зависит от температуры и физических свойств потоков, участвующих в теплообмене, теплового сопротивления разделяющей стенки, размера и конструкции поверхности теплопередачи. Процесс теплопередачи в теплообменнике может быть описан уравнением теплового баланса

$$Q = Vc\,(t_к - t_н) = Lc'\,(\theta_н - \theta_к) \qquad (IV, 24)$$

где c, c' — теплоемкости нагреваемого продукта и теплоносителя; $t_н$, $t_к$, $\theta_н$, $\theta_к$ — соответственно начальные и конечные температуры нагреваемого продукта и теплоносителя.

и уравнением теплопередачи

$$Q = KF\,\Delta t_{ср} \qquad (IV, 25)$$

где K — коэффициент теплопередачи; F — поверхность теплопередачи; $\Delta t_{ср}$ — средний температурный напор.

Средний температурный напор (средняя разность температур горячего и холодного потоков) зависит от того, в каком направлении друг относительно друга протекают потоки, участвующие в теплообмене.

При параллельном токе, когда оба потока протекают в одном и том же направлении, средний температурный напор

определяется средней логарифмической разностью температур на входе и выходе теплообменника

$$\Delta t_{пар} = \frac{\Delta t_н - \Delta t_к}{\ln \frac{\Delta t_н}{\Delta t_к}}$$

где

$$\Delta t_н = \theta_н - t_н \qquad \Delta t_к = \theta_к - t_к \qquad \text{(IV, 26)}$$

При противотоке средний температурный напор также определяется средней логарифмической разностью температур на входе и выходе теплообменника

$$\Delta t_{пт} = \frac{\Delta t_н - \Delta t_к}{\ln \frac{\Delta t_н}{\Delta t_к}}$$

где

$$\Delta t_н = \theta_н - t_к \qquad \Delta t_к = \theta_к - t_н \qquad \text{(IV, 27)}$$

При перекрестном токе потоки, участвующие в теплообмене, протекают под углом друг к другу. В этом случае аналитическое определение средней разности температур затруднительно. С точностью, достаточной для технических расчетов, ее можно определить как среднюю разность температур при противотоке, умноженную на поправочный коэффициент:

$$\Delta t_п = \Delta t_{пт} \varepsilon$$

В дальнейшем с известным приближением будем считать коэффициент ε для данного теплообменника постоянным. Коэффициент теплопередачи K определяет количество тепла, передаваемого от теплоносителя к нагреваемому продукту через элемент стенки поверхностью 1 $м^2$ за 1 *ч* при разности температур между теплоносителем и нагреваемым продуктом в 1° С [в *ккал*/(*м*^{2}·*ч*·*град*)]

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \qquad \text{(IV, 28)}$$

где α_1 — коэффициент теплоотдачи от теплоносителя к стенке, *ккал*/(*м*^{2}·*ч*·*град*); α_2 — коэффициент теплоотдачи от стенки к нагреваемому продукту, *ккал*/(*м*^{2}·*ч*·*град*); $\sum_{i=1}^{n} \delta_i/\lambda_i$ — коэффициент теплопередачи через многослойную стенку; δ_i — толщина i-того слоя, *м*; λ_i — коэффициент теплопроводности i-того слоя, *ккал*/(*м*·*ч*·*град*).

Будем считать, что коэффициент теплопередачи K не зависит от нагрузки теплообменника. В дальнейшем проанализируем распределение нагрузок с учетом зависимости K от скоростей потоков.

Определим зависимость количества передаваемого тепла Q от нагрузок теплообменников V и L.

Температуры на выходе из теплообменников

$$t_к = t_н + \frac{Q}{Vc}$$
$$\theta_к = \theta_н - \frac{Q}{Lc'} \qquad \text{(IV, 29)}$$

Средняя логарифмическая разность температур при параллельном токе

$$\Delta t_{ср} = \frac{\theta_н - t_н - \left(\theta_н - \frac{Q}{Lc'}\right) + \left(t_н + \frac{Q}{Vc}\right)}{\ln \dfrac{\theta_н - t_н}{\theta_н - \frac{Q}{Lc'} - t_н - \frac{Q}{Vc}}} \qquad \text{(IV, 30)}$$

Подставляя выражения (IV, 29), (IV,30) в уравнения (IV, 24), (IV, 25), разрешаем их относительно Q

$$Q = \frac{(\theta_н - t_н)\left[1 - e^{-KF\left(\frac{1}{Lc'} - \frac{1}{Vc}\right)}\right]}{\frac{1}{Lc'} + \frac{1}{Vc}} \qquad \text{(IV, 31)}$$

Аналогичным образом для противотока получаем

$$Q = \frac{(\theta_н - t_н)\left[1 - e^{-KF\left(\frac{1}{Lc'} - \frac{1}{Vc}\right)}\right]}{\frac{1}{Lc'} - \frac{1}{Vc}\, e^{-KF\left(\frac{1}{Lc'} - \frac{1}{Vc}\right)}} \qquad \text{(IV, 32)}$$

Уравнение теплопередачи для перекрестного тока отличается от соответствующего уравнения для противотока только постоянным коэффициентом ε, поэтому случай перекрестного тока в отдельности можно не рассматривать.

Можно показать, что функция $Q(L, V)$ выпуклая по V и L. Из главы III известно, что для решения задачи распределения, обеспечивающего максимум суммы выпуклых функций, надо найти максимум вспомогательной функции Лагранжа

$$F = \sum_{i=1}^{n} Q_i + \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} V_i - V_0\right] + \mu \left[\sum_{i=1}^{n} L_i - L_0\right] \qquad \text{(IV, 33)}$$

где i — номер аппарата; λ, μ — неопределенные множители Лагранжа.

Дифференцируя функцию (IV, 33), получаем систему уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial Q_i}{\partial V_i}(V_i,\ L_i)=\lambda \\ &\frac{\partial Q_i}{\partial L_i}(V_i,\ L_i)=\mu \\ &\sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \\ &\sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{aligned}\right. \tag{IV, 34}$$

Определим производные функции $Q_i(V_i,\ L_i)$ по V_i и L_i:
для параллельного тока

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial V_i}\right)_{\text{пар}} = (\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}})\left[1 - e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'}+\frac{1}{V_ic}\right)}\right]\times$$

$$\times\frac{\left[1+K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'}+\frac{1}{V_ic}\right)\right]}{\left(\frac{V_i}{L_i}\cdot\frac{c}{c'}+1\right)^2} = f_{11}\left(\frac{K_i\ F_i}{L_i},\ \frac{K_iF_i}{V_i}\right)$$

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial L_i}\right)_{\text{пар}} = (\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}})\left[1 - e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'}+\frac{1}{V_ic}\right)}\right]\times \tag{IV, 35}$$

$$\times\frac{\left[1+K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'}+\frac{1}{V_ic}\right)\right]}{\left(1+\frac{L_i}{V_i}\cdot\frac{c'}{c}\right)^2} = f_{12}\left(\frac{K_iF_i}{L_i},\ \frac{K_iF_i}{V_i}\right)$$

для противотока

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial V_i}\right)_{\text{пт}} = (\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}})\, e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'}-\frac{1}{V_ic}\right)}\times$$

$$\times\frac{\left[e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'}-\frac{1}{V_ic}\right)} - 1 + K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'_i}-\frac{1}{V_ic}\right)\right]}{\left[1-\frac{L_ic'}{V_ic}\,e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'}-\frac{1}{V_ic}\right)}\right]^2} =$$

$$= f_{21}\left(\frac{K_iF_i}{L_i},\ \frac{K_iF_i}{V_i}\right) \tag{IV, 36}$$

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial L_i}\right)_{\text{пт}} = (\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}})\times$$

$$\times\frac{\left\{1-e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'}-\frac{1}{V_ic}\right)}\left[1+K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'_i}-\frac{1}{V_ic}\right)\right]\right\}}{\left[1-\frac{L_ic'}{V_ic}\,e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{L_ic'}-\frac{1}{V_ic}\right)}\right]^2} =$$

$$= f_{22}\left(\frac{K_iF_i}{L_i},\ \frac{K_iF_i}{V_i}\right)$$

Перепишем систему уравнений (IV, 34) для прямотока

$$\begin{cases} f_{11}\left(\frac{K_iF_i}{V_i}, \frac{K_iF_i}{L_i}\right)=\lambda \\ f_{12}\left(\frac{K_iF_i}{V_i}, \frac{K_iF_i}{L_i}\right)=\mu \\ \sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \\ \sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \quad i=1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{IV, 37}$$

Получим систему из $(2n+2)$ уравнений. Первые $2n$ уравнений можно разбить на n пар

$$\begin{cases} f_{11}\left(\frac{K_iF_i}{V_i}, \frac{K_iF_i}{L_i}\right)=\lambda \\ f_{12}\left(\frac{K_iF_i}{V_i}, \frac{K_iF_i}{L_i}\right)=\mu \end{cases}$$

Задаваясь произвольными постоянными λ и μ, решим эту систему из двух уравнений относительно неизвестных $\frac{K_iF_i}{V_i}$ и $\frac{K_iF_i}{L_i}$:

$$\begin{aligned} \frac{K_iF_i}{V_i} &= \varphi(\lambda, \mu) \\ \frac{K_iF_i}{L_i} &= \psi(\lambda, \mu) \end{aligned} \tag{IV, 38}$$

Так как вид функций f_1 и f_2 не зависит от i, вид функций φ и ψ также не зависит от i. Вследствие этого в правые части выражений (IV, 38) можно подставить новые произвольные постоянные, одинаковые для всех i:

$$p=\varphi(\lambda, \mu) \quad q=\psi(\lambda, \mu)$$

Получаем

$$\frac{K_iF_i}{V_i}=p$$

$$\frac{K_iF_i}{L_i}=q$$

Таким образом, систему нелинейных уравнений (IV, 34) можно заменить эквивалентной системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{K_iF_i}{V_i}=p \\ \frac{K_iF_i}{L_i}=q \quad i=1, 2, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \\ \sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \end{cases} \tag{IV, 39}$$

Запишем решение системы уравнений (IV, 39)

$$V_i = \frac{V_0 K_i F_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_i F_i}$$

$$L_i = \frac{L_0 K_i F_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_i F_i} \qquad \text{(IV, 40)}$$

Если теплообменные аппараты одинаковы, т. е.

$$K_1 F_1 = K_2 F_2 = \ldots = K_n F_n$$

то

$$V_i = \frac{V_0}{n} \qquad L_i = \frac{L_0}{n} \qquad \text{(IV, 41)}$$

т. е. нагрузки распределяются поровну.

Аналогичные рассуждения показывают, что этот вывод справедлив и для противоточных теплообменников.

Определим температуру потоков на выходе из теплообменника при оптимальном распределении нагрузок:

Для параллельного тока

$$t_{\text{к}i} = t_{\text{н}} + \frac{Q_i}{V_i c} = t_{\text{н}} + \frac{\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}}}{\frac{V_i c}{L_i c'} + 1} \left[1 - e^{-K_i F_i \left(\frac{1}{L_i c'} + \frac{1}{V_i c}\right)}\right] = \varphi_{11}\left(\frac{K_i F_i}{V_i}, \frac{K_i F_i}{L_i}\right)$$

$$\theta_{\text{к}i} = \theta_{\text{н}} - \frac{Q_i}{L_i c'} = \theta_{\text{н}} - \frac{\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}}}{1 + \frac{L_i c'}{V_i c}} \left[1 - e^{-K_i F_i \left(\frac{1}{L_i c'} + \frac{1}{V_i c}\right)}\right] = \varphi_{12}\left(\frac{K_i F_i}{V_i}, \frac{K_i F_i}{L_i}\right) \qquad \text{(IV, 42)}$$

Для противотока

$$t_{\text{к}i} = t_{\text{н}} + \frac{(\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}})\left[1 - e^{-K_i F_i \left(\frac{1}{L_i c'} - \frac{1}{V_i c}\right)}\right]}{\frac{V_i c}{L_i c'} - e^{-K_i F_i \left(\frac{1}{L_i c'} - \frac{1}{V_i c}\right)}} = \varphi_{21}\left(\frac{K_i F_i}{V_i}, \frac{K_i F_i}{L_i}\right)$$

$$\theta_{\text{к}i} = \theta_{\text{н}} - \frac{(\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}})\left[1 - e^{-K_i F_i \left(\frac{1}{L_i c'} - \frac{1}{V_i c}\right)}\right]}{1 - \frac{L_i c'}{V_i c} e^{-K_i F_i \left(\frac{1}{L_i c'} - \frac{1}{V_i c}\right)}} = \varphi_{22}\left(\frac{K_i F_i}{V_i}, \frac{K_i F_i}{L_i}\right) \qquad \text{(IV, 43)}$$

Выше (IV, 38) было показано, что при оптимальном распределении отношение коэффициента теплопередачи к нагрузке

одинаково для всех теплообменников

$$\frac{K_1F_1}{V_1} = \frac{K_2F_2}{V_2} = \dots = \frac{K_nF_n}{V_n} = p$$

$$\frac{K_1F_1}{L_1} = \frac{K_2F_2}{L_2} = \dots = \frac{K_nF_n}{L_n} = q$$

Поэтому подставив в формулы (IV, 42), (IV, 43) постоянные p и q, находим, что температуры на выходе из теплообменников равны между собой

$$t_{к1} = t_{к2} = \dots = t_{кn}$$
$$\theta_{к1} = \theta_{к2} = \dots = \theta_{кn} \qquad (IV, 44)$$

Итак, правила оптимального распределения нагрузок между теплообменными аппаратами могут быть сформулированы следующим образом:

Если все теплообменники ***одинаковы****, теплоноситель и нагреваемый продукт распределяют поровну между всеми теплообменниками.*

Если все теплообменники ***одинаковы по конструкции****, но имеют разный средний коэффициент теплопередачи, нагрузки следует распределять прямо пропорционально коэффициенту теплопередачи.*

Если теплообменники ***разные****, нагрузки надо распределять прямо пропорционально произведению коэффициента теплопередачи на величину поверхности теплообменника.*

Соотношение расхода теплоносителя и нагреваемого продукта во всех случаях должно быть постоянным:

$$\frac{V_1}{L_1} = \frac{V_2}{L_2} = \dots = \frac{V_n}{L_n} = \frac{V_0}{L_0} \qquad (IV, 45)$$

Температуры теплоносителя и нагреваемого продукта на выходе из теплообменников должны быть равны между собой

$$t_{к1} = t_{к2} = \dots = t_{кn}$$
$$\theta_{к1} = \theta_{к2} = \dots = \theta_{кn} \qquad (IV, 44)$$

Последний вывод очень важен, так как он устанавливает простой и наглядный признак оптимального распределения нагрузок между теплообменниками: равенство *определяющих параметров* (в данном случае температур).

До сих пор мы рассматривали весьма упрощенный случай, при котором предполагалось, что коэффициент теплопередачи K не зависит от нагрузки теплообменника. Найдем теперь закон распределения нагрузки между теплообменниками, имеющими одинаковую поверхность $F_i = F$ и разные коэффициенты теплопередачи K, с учетом влияния нагрузки теплообменника на

коэффициент K. Зависимость коэффициента теплопередачи от нагрузки может быть определена по формуле (IV, 28), в которой коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 зависят от скорости теплоотдающих потоков и конструкции теплообменника

$$\alpha_1 = C_1 V^{a_1} \quad \alpha_2 = C_2 L^{a_2} \tag{IV, 46}$$

где C_1, C_2, a_1, a_2 — постоянные коэффициенты, зависящие от свойств жидкости или газа, отдающих тепло, и от свойств теплопередающей поверхности.

Полный коэффициент теплопередачи может быть определен путем подстановки выражений (IV, 46) в формулу (IV, 28)

$$K = \frac{1}{\frac{1}{C_1 V^{a_1}} + \frac{1}{C_2 L^{a_2}} + \frac{1}{C_3}} \tag{IV, 47}$$

Если основную часть теплового сопротивления составляет тепловое сопротивление стенки, т. е. если

$$\frac{1}{C_3} \gg \frac{1}{C_1 V^{a_1}} + \frac{1}{C_2 L^{a_2}} \tag{IV, 48}$$

коэффициент теплопередачи мало зависит от нагрузки и может считаться постоянным

$$K \approx C_3 \tag{IV, 49}$$

Если же тепловое сопротивление теплообменника определяется в основном теплообменом между стенкой и одним из потоков, т. е.

$$\frac{1}{C_1 V^{a_1}} \gg \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2 L^{a_2}} \tag{IV, 50}$$

коэффициент теплопередачи будет зависеть только от нагрузки по этому потоку

$$K = C_1 V^{a_1} \tag{IV, 51}$$

Для относительно узкого диапазона изменения переменных V и L зависимость (IV, 47) может быть представлена в виде

$$K = K_{0i} + \alpha V_i + \beta L_i \tag{IV, 52}$$

либо в виде

$$K = K_{0i} V_i^{\gamma} L_i^{\delta} \tag{IV, 53}$$

Задачу распределения нагрузок, так же как и раньше, будем решать методом неопределенных множителей Лагранжа. Система уравнений, которую необходимо решить для нахождения

оптимального распределения, имеет вид:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dQ_i}{dL_i} = \lambda \\ &\frac{dQ_i}{dV_i} = \mu \\ &\sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \\ &\sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \end{aligned}\right. \qquad \text{(IV, 54)}$$

Полные производные dQ_i/dV_i и dQ_i/dL_i можно найти как производные сложной функции

$$\frac{dQ_i}{dV_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial K_i}\cdot\frac{\partial K_i}{\partial V_i}$$

$$\frac{dQ_i}{dL_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial L_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial K_i}\cdot\frac{\partial K_i}{\partial L_i} \qquad \text{(IV, 55)}$$

Производные $\partial Q_i/\partial V_i$ и $\partial Q_i/\partial L_i$ были определены раньше [см. формулы (IV, 35—IV, 36)]. Теперь вычислим производные $\partial Q_i/\partial K_i$, $\partial K_i/\partial V_i$, $\partial K_i/\partial L_i$:

для параллельного тока

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial K_i}\right)_{\text{пар}} = \frac{(\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}})\, F e^{-K_i F\left(\frac{1}{L_i c'} + \frac{1}{V_i c}\right)}}{\frac{1}{L_i c'} + \frac{1}{V_i c}} = \psi_1\left(\frac{K_i}{V_i},\ \frac{K_i}{L_i}\right) \qquad \text{(IV, 56)}$$

для противотока

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial K_i}\right)_{\text{пт}} = \frac{(\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}})\, F e^{-K_i F\left(\frac{1}{L_i c'} + \frac{1}{V_i c}\right)}\left[\frac{1}{L_i c'} - \frac{1}{V_i c}\right]^2}{\left[\frac{1}{L_i c'} - \frac{1}{V_i c}\cdot e^{-K_i F\left(\frac{1}{L_i c'} - \frac{1}{V_i c}\right)}\right]^2} = \psi_2\left(\frac{K_i}{V_i},\ \frac{K_i}{L_i}\right) \qquad \text{(IV, 57)}$$

Если зависимость коэффициента теплопередачи от нагрузок линейна [формула (IV, 52)], то

$$\frac{\partial K_i}{\partial V_i} = \alpha \qquad \frac{\partial K_i}{\partial L_i} = \beta \qquad \text{(IV, 58)}$$

Если зависимость коэффициента массопередачи от нагрузок имеет экспоненциальную форму (IV, 53), то

$$\frac{\partial K_i}{\partial V_i} = (\gamma - 1)\, K_{0i} V_i^{\gamma-1} L_i^{\delta} = \frac{\gamma - 1}{V_i}\, K_i$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial L_i} = (\delta - 1)\, K_{0i} V_i^{\gamma} L_i^{\delta-1} = \frac{\delta - 1}{L_i}\cdot K_i \qquad \text{(IV, 59)}$$

Подставляя значения полных производных dQ_i/dV_i и dQ_i/dL_i в систему (IV, 54), получаем следующие системы уравнений для противотока:

при линейной зависимости коэффициента теплопередачи от нагрузки

$$\begin{cases} f_{21}\left(\frac{K_i}{V_i}, \frac{K_i}{L_i}\right) + \psi_2\left(\frac{K_i}{V_i}, \frac{K_i}{L_i}\right)\alpha = \lambda \\ f_{22}\left(\frac{K_i}{V_i}, \frac{K_i}{L_i}\right) + \psi_2\left(\frac{K_i}{V_i}, \frac{K_i}{L_i}\right)\alpha = \mu \\ \sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \\ \sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \\ K_i = K_{0i} + \alpha V_i + \beta L_i \end{cases} \tag{IV, 60}$$

при экспоненциальной зависимости коэффициента теплопередачи от нагрузки

$$\begin{cases} f_{21}\left(\frac{K_i}{V_i}, \frac{K_i}{L_i}\right) + \psi_2\left(\frac{K_i}{V_i}, \frac{K_i}{L_i}\right)(\gamma - 1)\frac{K_i}{V_i} = \lambda \\ f_{22}\left(\frac{K_i}{V_i}, \frac{K_i}{L_i}\right) + \psi_2\left(\frac{K_i}{V_i}, \frac{K_i}{L_i}\right)(\delta - 1)\frac{K_i}{L_i} = \mu \\ \sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \\ \sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \\ K_i = K_{0i} V_i^{\gamma} L_i^{\delta} \end{cases} \tag{IV, 61}$$

Решение системы уравнений (IV, 60)

$$V_i = \frac{V_0 K_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} K_{0i}} \qquad L_i = \frac{L_0 K_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} K_{0i}} \tag{IV, 62}$$

т. е. нагрузки следует распределять пропорционально постоянной составляющей коэффициента массопередачи K_{0i}. Решение системы (IV, 61) имеет вид

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{V_0 K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}}{\sum_{i=1}^{n} K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}} \\ L_i &= \frac{L_0 K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}}{\sum_{i=1}^{n} K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}} \end{aligned} \tag{IV, 63}$$

Подставив выражения, определяющие оптимальные нагрузки, в формулу (IV, 43), определим температуры на выходе теплообменника при оптимальном распределении. При этом, так же как и в предыдущем, более простом случае, получим, что при оптимальном распределении температуры на выходе параллельных теплообменников одинаковы. Приведенные выкладки показывают, что с учетом влияния нагрузок V_i и L_i на коэффициент теплопередачи, оптимальное распределение нагрузок между теплообменными аппаратами подчиняется простым правилам:

Между одинаковыми теплообменниками нагрузки распределяются поровну.

Между теплообменниками, имеющими разный коэффициент теплопередачи, нагрузки распределяются пропорционально постоянной составляющей коэффициента теплопередачи в первой степени (для $K = K_{0i} + \alpha V_i + \beta L_i$) или в степени $\frac{1}{1-\gamma-\delta}$ (для $K = K_{0i} V_i^{\gamma} L_i^{\delta}$).

Отношения V_i/L_i, а также температуры на выходе t_{ki} и θ_{hi} должны быть одинаковы для всех теплообменников.

В качестве примера рассмотрим распределение нагрузки между двумя противоточными теплообменниками.

Пусть $c = c'$ и коэффициенты теплопередачи для первого и второго теплообменников

$$K_1 = V_1^{0,8} \qquad K_2 = 0{,}7V_2^{0,8}$$

Общая нагрузка теплообменников по горячему потоку $L_0 = 2$, по холодному потоку $V_0 = 1$. Количество тепла, передаваемого в теплообменнике, определяется выражением (IV, 32).

Оптимальное распределение нагреваемого вещества определяется по формуле (IV, 63)

$$V_1 = \frac{V_0 K_{10}^{\frac{1}{1-0,8}}}{K_{10}^{\frac{1}{1-0,8}} + K_{20}^{\frac{1}{1-0,8}}} = \frac{1 \cdot 1^5}{1^5 + 0{,}7^5} = 0{,}855$$

$$V_2 = \frac{V_0 K_{20}^5}{K_{10}^5 + K_{20}^5} = \frac{1 \cdot 0{,}7^5}{1^5 + 0{,}7^5} = 0{,}145$$

Оптимальное распределение теплоносителя определяется из условия

$$\frac{V_1}{L_1} = \frac{V_2}{L_2} = \frac{V_0}{L_0} = \frac{1}{2}$$

$$L_1 = 1{,}71 \qquad L_2 = 0{,}29$$

Количество тепла, передаваемого в теплообменниках при оптимальном распределении

$$Q_{\text{опт}} = 0{,}575\,(\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}})$$

При равномерном распределении нагрузок $V_1 = V_2 = 0{,}5$ количество передаваемого тепла $Q_{\text{р}} = 0{,}551\,(\theta_{\text{н}} - t_{\text{н}})$; при оптимальном распределении количество переданного тепла на 4,32% больше. Если же учесть, что нагрузка

теплообменника не может быть больше $V_{max} = 0,7$, то при оптимальном распределении $V_1^* = 0,7$, $V_2^* = 0,3$. При этом количество передаваемого тепла $Q_{опт}^* = 0,569 (\theta_н - t_н)$ повысится на 3,23% по сравнению с равномерным распределением.

Описанный в этом параграфе алгоритм распределения весьма привлекателен в силу своей простоты: для оптимального распределения нагрузок оказывается достаточным знать не всю характеристику затрат, а только значение коэффициента теплопередачи или температуры на выходе из теплообменника. Используя этот алгоритм распределения, необходимо помнить, что коэффициент теплопередачи должен удовлетворять некоторым ограничениям: либо не зависеть от нагрузки теплообменника, либо иметь зависимость, которая для всех аппаратов аппроксимируется прямыми, имеющими одни и те же наклоны в обычных [формула (IV, 52)] или логарифмических [формула (IV, 53)] координатах. При использовании данного алгоритма в практических случаях необходимо проверить справедливость этого предположения.

АБСОРБЦИОННЫЕ АППАРАТЫ

Абсорбционные процессы широко распространены в химической промышленности[85, 86, 87]; они применяются для очистки газов от нежелательных компонентов, для получения готовых продуктов путем поглощения газа жидкостью, для разделения газовых смесей, для улавливания ценных компонентов из газовой смеси и т. д.

Процесс передачи вещества из газообразной фазы в жидкую происходит на поверхности соприкосновения фаз, поэтому абсорбционные аппараты имеют сильно развитую поверхность соприкосновения газа с жидкостью, что достигается путем загрузки аппаратов насадкой (кольцами, решетками и т. д.), распылением жидкости в массе газа (распыливающие аппараты), либо распылением газа в массе жидкости (барботажные аппараты).

Качество работы абсорбционного аппарата определяется количеством вещества, передаваемого из одной фазы в другую, и зависит от количества газа и жидкости, состава газа, величины поверхности массообмена, температуры и ряда других факторов.

Задача оптимального распределения нагрузок между параллельно работающими абсорбционными аппаратами заключается в распределении газовой и жидкостной нагрузки и может быть поставлена в одном из следующих трех вариантов.

Вариант I. Найти распределение потоков газа V_1, V_2, ..., V_n и жидкости L_1, L_2, ..., L_n, обеспечивающее максимальную передачу заданного компонента в жидкую фазу

$$\max G = \max \sum_{i=1} G_i(V_i, L_i) \qquad \text{(IV, 64)}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \qquad \sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \qquad \text{(IV, 65)}$$

где V_i, L_i, G_i — расходы инертного газа, растворителя и абсорбируемого компонента, соответственно (для i-того агрегата); V_0, L_0 — заданные общие расходы инертного газа и растворителя.

Вариант II. Найти распределение потоков газа V_1, V_2, ..., V_n и жидкости L_1, L_2, ..., L_n, обеспечивающее минимальную концентрацию заданного компонента в смеси газов на выходе из аппаратов

$$\min Y_к = \min \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{кi} V_i}{V_0} \qquad \text{(IV, 66)}$$

при заданной общей нагрузке по газу и жидкости

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V_0$$
$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \qquad \text{(IV, 67)}$$

где $Y_{к\,i}$ — содержание заданного компонента в газе на выходе из аппарата, *кмоль/кмоль* инертного газа.

Вариант III. Найти распределение потоков газа V_1, V_2, ..., V_n, обеспечивающее минимальный расход жидкости

$$\min L = \min \sum_{i=1}^{n} L_i \qquad \text{(IV, 68)}$$

при заданных общем количестве газа V_0 и средней концентрации заданного компонента в газе после абсорбции $Y_{к.\,ср}$

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V_0$$
$$Y_{к\,ср} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{кi} V_i}{V_0} \qquad \text{(IV, 69)}$$

Во всех трех случаях решение задачи распределения приводит к одинаковым результатам.

Оптимальное распределение нагрузок между абсорбционными аппаратами имеет общие черты с соответствующей задачей для теплообменных аппаратов. Как в том, так и другом случаях

необходимо решать двухмерную задачу распределения. Однако процессы массообмена, лежащие в основе действия абсорбционных аппаратов, значительно более сложны, так как в абсорбционном процессе участвуют две фазы — жидкая и газообразная.

Для построения модели абсорбционного аппарата необходимо исследовать статику и кинетику массообменного процесса.

Статика абсорбции определяет зависимость между концентрацией абсорбируемого компонента в газообразной и жидкой фазах в установившемся состоянии (растворимость газа). Растворимость газа в жидкости зависит от рода газа и жидкости, а также от температуры и давления среды. Статика абсорбции описывается уравнением кривой равновесия

$$y_p = f(x) \quad \text{или} \quad x_p = \varphi(y) \qquad \text{(IV, 70)}$$

где y_p, x_p — равновесная концентрация компонента в газовой и жидкой фазах; y, x — рабочая молярная концентрация компонента в газовой и жидкой фазах.

Для идеальных газов равновесный состав системы газ — раствор газа в жидкости по закону Генри определяется прямой линией

$$y_p = k_1 x \qquad \text{(IV, 71)}$$

Для жидких идеальных двухкомпонентных растворов равновесная зависимость между составами пара и жидкости выражается гиперболой

$$y_p = \frac{\alpha x}{1 + x(\alpha - 1)} \qquad \text{(IV, 72)}$$

где x — концентрация первого компонента в растворе; $\alpha = P_{k1}/P_{k2}$ — относительная летучесть компонентов смеси.

Кривая равновесия реальных растворов может быть найдена только экспериментальным путем.

При отсутствии равновесия происходит передача вещества из одной фазы в другую. Кинетика абсорбции, т. е. скорость процесса массопередачи, определяется движущей силой процесса, т. е. разностью между фактической концентрацией компонента в одной из фаз и его равновесной концентрацией.

Скорость массопередачи определяется выражением

$$dG = K_г\, dF\, (y - y_p) = K_ж\, dF\, (x_p - x) \qquad \text{(IV, 73)}$$

где dG — количество вещества, переходящего из одной фазы в другую через элемент поверхности dF за единицу времени, *кмоль/ч*; $K_г$, $K_ж$ — коэффициенты массопередачи, отнесенные к газовой и жидкой фазам.

Общий коэффициент массопередачи можно определить через частные коэффициенты $\beta_г$ и $\beta_ж$, которые характеризуют сопротивление массопередаче, создаваемое в отдельности газовой и жидкой фазой, по формуле

$$\frac{1}{K_г} = \frac{1}{\beta_г} + \frac{m}{\beta_ж} \qquad \text{(IV, 74)}$$

где $1/\beta_г$ — сопротивление массопередаче, оказываемое газообразной фазой; $1/\beta_ж$ — то же, для жидкой фазы; m — константа равновесия.

Коэффициент массопередачи зависит от большого числа факторов, в том числе от гидродинамических условий массопередачи, температуры, давления и т. д.

Действительная поверхность массопередачи редко бывает известна. Например, в барботажных абсорберах она зависит от режима движения фаз, в насадочных — от степени смачивания насадки. На практике обычно пользуются коэффициентами массопередачи, отнесенными к единице объема аппарата.

В дальнейшем будем использовать коэффициент массопередачи, отнесенный к газовой фазе, и обозначим его K.

Рассмотрим насадочный абсорбер, представляющий собой цилиндрический сосуд, заполненный насадкой. Газ и жидкость могут поступать в сосуд с одной стороны (прямоток) или с разных сторон (противоток). Последняя схема более распространена (рис. 42).

$L, x_н$

$V, y_к$

$V, y_н$

$L, x_к$

Рис. 42. Структурная схема абсорбера.

Для определения зависимости между количеством вещества, передаваемого из газообразной фазы в жидкую, и нагрузкой абсорбционного аппарата используются уравнения массопередачи (IV, 73) совместно с уравнениями материального баланса.

При построении модели абсорбционных аппаратов концентрацию абсорбируемого компонента в газовой смеси Y выражают в *кмоль* на 1 *кмоль* инертного газа, а содержание того же компонента в растворе X — в *кмоль* на 1 *кмоль* растворителя. Соотношения между молярными концентрациями x, y и относительными концентрациями X, Y выражаются уравнениями

$$y = \frac{Y}{1+Y} \qquad x = \frac{X}{1+X} \qquad \text{(IV, 75)}$$

Построим модель аппарата, в котором протекает изотермическая абсорбция, т. е. процесс, при котором температура обеих фаз во всех точках аппарата одинакова.

Изотермическая абсорбция

Рассмотрим абсорбционный аппарат, работающий по схеме противотока. Воспользуемся уравнением массопередачи, отнесенным к газовой пленке. Пусть кривая равновесия $Y_р = f(X)$ известна.

Запишем материальный баланс аппарата

$$G = V(Y_н - Y_к) = L(X_н - X_к) \qquad \text{(IV, 76)}$$

Индекс «*н*» относится ко входу, индекс «к» — к выходу газа или растворителя.

Уравнение материального баланса для части аппарата между входом газа и произвольным сечением при противотоке:

$$G = V(Y_н - Y) = L(X_к - X) \qquad \text{(IV, 77)}$$

Это уравнение прямой носит название уравнения рабочей линии. Каждая точка на этой прямой характеризует некоторое сечение аппарата, в котором составы жидкости и газа равны X и Y (рис. 43).

Рис. 43. Рабочая (II) и равновесная (I) линии.

Движущая сила абсорбции в произвольной точке аппарата определяется разностью между ординатами кривой равновесия I и рабочей линии II

$$dG = KdF(y - y_р) \qquad \text{(IV,78)}$$

При малой концентрации компонента молярные концентрации можно заменить относительными

$$dG = K\,dF(Y - Y_р) \qquad \text{(IV,79)}$$

Учитывая, что $dG = VdY = LdX$, проинтегрируем уравнение (IV, 79) по всей поверхности F

$$G = KF\Delta_{ср} \qquad \text{(IV, 80)}$$

где $\Delta_{ср}$ — средняя движущая сила абсорбции, отнесенная к газовой фазе.

$$\Delta_{ср} = \frac{Y_н - Y_к}{\int\limits_{Y_н}^{Y_к} \frac{dY}{Y - Y_р}}$$

Концентрации компонента в произвольном сечении X, Y и на выходе из аппарата $X_к$, $Y_к$ определим из уравнений (IV, 76), (IV, 77):

$$Y_к = Y_н - \frac{G}{V} \qquad X_к = X_н + \frac{G}{L}$$

$$Y = Y_н - \frac{G}{V} + \frac{L}{V}(X - X_н) \qquad X = X_н + \frac{G}{L} - \frac{V}{L}(Y_н - Y) \qquad \text{(IV, 81)}$$

Подставив X, Y, $Y_к$, $X_к$ в уравнение (IV, 79), получим

$$G = \frac{KF\frac{G}{V}}{Y_н - \frac{G}{V}} \int\limits_{Y_н}^{Y_к} \frac{dY}{Y - f\left[X_н + \frac{G}{L} - \frac{V}{L}(Y_н - Y)\right]} \qquad \text{(IV, 82)}$$

Если зависимость $Y_p = f(X)$ линейна, т. е.

$$Y_p = \alpha X \tag{IV, 83}$$

то, подставляя (IV, 83) в (IV, 82) и интегрируя, получим

$$G = \frac{L(Y_н - \alpha X_н)\left(1 - e^{-KF\left(\frac{1}{V} - \frac{\alpha}{L}\right)}\right)}{\alpha\left(1 - \frac{L}{\alpha V} e^{-KF\left(\frac{1}{V} - \frac{\alpha}{L}\right)}\right)}. \tag{IV, 84}$$

Легко показать, что зависимость $G(V, L)$ выпукла по V и L.

Все параллельно работающие абсорберы описываются уравнениями вида (IV, 84). Разные аппараты могут отличаться друг от друга только значением произведения K_iF_i, которое зависит от конструкции абсорбера и состояния поверхности насадки.

Задачу распределения нагрузок будем рассматривать в первой постановке, т. е. найдем распределение газа и жидкости, обеспечивающее максимальную передачу абсорбируемого компонента из газообразной фазы в жидкую. Для этого решим систему уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_i}{\partial V_i} = \lambda \\ \dfrac{\partial G_i}{\partial L_i} = \mu \\ \sum\limits_{i=1}^{n} V_i = V_0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} L_i = L_0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{IV, 85}$$

Производные $\partial G_i/\partial V_i$ и $\partial G_i/\partial L_i$ имеют вид

$$\frac{\partial G_i}{\partial V_i} = \frac{(Y_н - \alpha X_н)\, e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{V_i} - \frac{\alpha}{L_i}\right)}\left[K_iF_i\left(\frac{1}{V_i} - \frac{\alpha}{L_i}\right) - 1 - e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{V_i} - \frac{\alpha}{L_i}\right)}\right]}{\left[\frac{\alpha V_i}{L_i} - e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{V_i} - \frac{\alpha}{L_i}\right)}\right]^2} = f_1\left(\frac{K_iF_i}{V_i}, \frac{K_iF_i}{L_i}\right) \tag{IV, 86}$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial L_i} = \frac{(Y_н - \alpha X_н)\left[1 - e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{V_i} - \frac{\alpha}{L_i}\right)} - K_iF_i\left(\frac{1}{V_i} - \frac{\alpha}{L_i}\right) e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{V_i} - \frac{\alpha}{L_i}\right)}\right]}{\alpha\left[1 - \frac{L_i}{\alpha V_i} e^{-K_iF_i\left(\frac{1}{V_i} - \frac{\alpha}{L_i}\right)}\right]^2} = f_2\left(\frac{K_iF_i}{V_i}, \frac{K_iF_i}{L_i}\right)$$

Подставляя выражения (IV, 86) в систему уравнений (IV, 85), получаем

$$\begin{cases} f_1\left(\frac{K_iF_i}{V_i}, \frac{K_iF_i}{L_i}\right) = \lambda \\ f_2\left(\frac{K_iF_i}{V_i}, \frac{K_iF_i}{L_i}\right) = \mu \\ \sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \\ \sum_{i=1}^{n} L_i = L_0 \end{cases} \qquad \text{(IV, 87)}$$

Полученная система уравнений для распределения нагрузок между абсорбционными аппаратами аналогична системе уравнений для распределения нагрузок между теплообменными аппаратами (IV, 37). Переходя к системе эквивалентных линейных уравнений и решая ее, приходим к аналогичному принципу распределения нагрузок

$$V_i = \frac{V_0K_iF_i}{\sum_{i=1}^{n} K_iF_i} \qquad L_i = \frac{L_0K_iF_i}{\sum_{i=1}^{n} K_iF_i} \qquad \text{(IV, 88)}$$

Расходы газа и жидкости на входе в аппарат пропорциональны расходам инертного газа и растворителя, поэтому их распределение также определяется формулой (IV, 88).

Если зависимость $Y_р = f(X)$ нелинейна, то знаменатель выражения (IV, 82) не всегда удается проинтегрировать аналитически. Однако очевидно, что получающаяся в результате интегрирования функция зависит от отношений G/L, G/V и V/L

$$\int_{Y_н}^{Y_k} \frac{dY}{Y - f\left[X_н + \frac{G}{L} - \frac{V}{L}(Y - Y_н)\right]} = \varphi\left(Y_н, X_н, \frac{G}{L}, \frac{G}{V}, \frac{V}{L}\right) = \frac{KF}{V} \qquad \text{(IV, 89)}$$

Умножим числитель и знаменатель дробей G/L, G/V и V/L на величину KF и выразим G из уравнения (IV, 89)

$$G = \psi\left(\frac{V}{KF}, \frac{L}{KF}\right)KF \qquad \text{(IV, 90)}$$

Решим систему (IV, 87). Для этого продифференцируем выражение (IV, 90) для каждого агрегата по V_i и L_i как сложную функцию

$$\frac{dG_i}{dV_i} = f_1^*\left(\frac{V_i}{K_iF_i}, \frac{L_i}{K_iF_i}\right) \qquad \frac{dG_i}{dL_i} = f_2^*\left(\frac{V_i}{K_iF_i}, \frac{L_i}{K_iF_i}\right) \qquad \text{(IV, 91)}$$

Таким образом, мы снова приходим к системе уравнений вида (IV, 87) и закону распределения нагрузок (IV, 88). Опреде-

лим концентрацию компонента в газовой и жидкой фазах на выходе из абсорбера при оптимальном распределении

$$Y_{\text{к}i} = Y_{\text{н}} - \frac{G_i}{V_i} = \psi_1^*\left(\frac{V_i}{K_iF_i},\ \frac{L_i}{K_iF_i}\right)$$
$$X_{\text{к}i} = X_{\text{н}} + \frac{G_i}{L_i} = \psi_2^*\left(\frac{V_i}{K_iF_i},\ \frac{L_i}{K_iF_i}\right) \quad \text{(IV, 92)}$$

Так как при оптимальном распределении отношения $V_i/(K_iF_i)$ и $L_i/(K_iF_i)$ одинаковы для всех аппаратов, то и концентрации абсорбируемого компонента на выходе из абсорбера должны быть одинаковы для всех параллельных аппаратов.

$$Y_{\text{к}1} = Y_{\text{к}2} = \ldots = Y_{\text{к}n}$$
$$X_{\text{к}1} = X_{\text{к}2} = \ldots = X_{\text{к}n} \quad \text{(IV, 93)}$$

Таким образом, при изотермической абсорбции оптимальное распределение нагрузок между параллельными абсорбционными аппаратами должно проводиться в соответствии со следующими правилами:

*Для **одинаковых** абсорбционных аппаратов нагрузку по газу и по жидкости распределяют поровну между всеми аппаратами.*

*Для абсорбционных аппаратов, **одинаковых по конструкции**, но имеющих разный коэффициент массопередачи, нагрузки должны быть прямо пропорциональны коэффициентам массопередачи.*

*Для **разных** абсорбционных аппаратов нагрузки должны быть прямо пропорциональны произведению коэффициента массопередачи на величину поверхности абсорбционного аппарата.*

Соотношение расходов жидкости и газа должно быть одинаковым для всех аппаратов

$$\frac{V_1}{L_1} = \frac{V_2}{L_2} = \ldots = \frac{V_n}{L_n} \quad \text{(IV, 94)}$$

Определяющие параметры (концентрации компонента в газовой и жидкой фазах на выходе из абсорберов) должны быть равны между собой

$$Y_{\text{к}1} = Y_{\text{к}2} = \ldots = Y_{\text{к}n} \qquad X_{\text{к}1} = X_{\text{к}2} = \ldots = X_{\text{к}n} \quad \text{(IV, 95)}$$

Неизотермическая абсорбция

Если проводить абсорбцию без отвода тепла, температура процесса будет повышаться вследствие выделения тепла при поглощении газа жидкостью. При изменении температуры изменяется положение линии равновесия и наряду с процессом массообмена происходит процесс теплообмена. В этом случае к уравнениям массообмена и материального баланса необходимо присоединить уравнения теплового баланса и теплообмена. Система дифференциальных уравнений, описывающих процесс неизотермической абсорбции, будет иметь следующий вид:

уравнение материального баланса

$$dG = V\,dY = L\,dX \qquad (IV, 96)$$

уравнение массопередачи

$$dY = -\frac{K\,dF}{V}\,[Y - Y_p(\theta, X)] \qquad (IV, 97)$$

уравнение теплового баланса

$$d\theta = \frac{c\,dt + \Phi\,dY - q\,dF}{c'l} \qquad (IV, 98)$$

уравнение теплопередачи

$$dt = \frac{\alpha\,dF}{Vc}(\theta - t) \qquad (IV, 99)$$

где θ — температура жидкости, °C; t — температура газа, °C; c, c' — теплоемкости газа и жидкости, *ккал/(кмоль·град)*; Φ — дифференциальная теплота растворения, *ккал/кмоль*; α — коэффициент теплопередачи между жидкостью и газом; q — потери тепла, отнесенные к единице поверхности; $l = L/V$.

Решив систему дифференциальных уравнений (IV, 96 — IV, 99) и определив зависимость $G(V, L)$, можно распределить нагрузки между аппаратами, пользуясь одним из методов, описанных в главе III. При некоторых упрощающих предположениях можно распространить выводы, сделанные ранее, на случай неизотермической абсорбции.

Так, если пренебречь потерями q, изменением температуры газа и теплообменом между фазами, то можно считать, что все выделяющееся тепло тратится на повышение температуры жидкости.

Тогда уравнение (IV, 99) отпадает. Интегрируя уравнение (IV, 98) от входа жидкости до произвольного сечения, определим температуру жидкости в произвольном сечении абсорбера

$$\theta = \theta_н + \frac{\Phi}{c'l}(Y - Y_к) = \varphi\left(\theta_н, \frac{L}{V}, Y, Y_к\right) \qquad (IV, 100)$$

Подставив температуру θ, определенную по формуле (IV, 100), в выражение для Y_p, получим

$$Y_p(\theta, X) = Y_p\left(\theta_н, \frac{L}{V}, Y, X\right) = Y_p\left(\theta_н, \frac{L}{V}, \frac{G}{L}, Y_н, X_н, Y\right) \quad (IV, 101)$$

Так как в выражении (IV, 101) переменные V и G встречаются только в виде отношения, а начальная температура жидкости $\theta_н$ — постоянная величина, при интегрировании уравнения массопередачи (IV, 97) получим выражение того же вида, что и (IV, 89)

$$\varphi\left(\theta_н, Y_н, X_н, \frac{G}{L}, \frac{G}{V}, \frac{L}{V}\right) = \frac{KF}{V} \qquad (IV, 102)$$

Отсюда следует, что в этом случае выводы о распределении нагрузок между параллельными аппаратами при изотермической

абсорбции можно распространить и на неизотермическую абсорбцию.

В другом варианте упрощения [88] считают, что при противотоке температура уходящего газа равна температуре поступающей жидкости

$$t_к = \theta_н$$

и что изменение температуры жидкости пропорционально изменению концентрации компонента в жидкости

$$d\theta = \alpha\, dX = -\beta\, dY$$

Тогда, интегрируя уравнение (IV, 98) от верха до низа аппарата и от верха до произвольного сечения, получим

$$\theta = \theta_н + \frac{1}{lc'}\left[c\,(t_н - \theta_н) + \Phi\,(Y_н - Y_к) - qF\right]\left[\frac{Y - Y_к}{Y_н - Y_к}\right) = f\left(\theta_н,\ \frac{L}{V},\ Y_н,\ Y_к,\ Y\right) \qquad \text{(IV, 103)}$$

Полученное выражение по виду совпадает с формулой (IV, 100), что позволяет распространить все сделанные ранее выводы и на этот случай.

Абсорбция с учетом зависимости изменения коэффициента массопередачи *K* от нагрузки

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что коэффициент массопередачи — постоянная величина. В действительности коэффициент массопередачи представляет собой сложную величину, зависящую от большого числа факторов, в том числе от нагрузки аппарата [85, 87]. На рис. 44 показан характер изменения коэффициента массопередачи при изменении нагрузки аппарата [87]. Отдельные участки кусочно-ломаной кривой соответствуют различным гидродинамическим режимам работы аппарата.

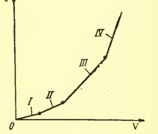


Рис. 44. Зависимость коэффициента массопередачи насадочного абсорбера от нагрузки:

I — ламинарный режим; *II* — переходный режим; *III* — турбулентный режим; *IV* — режим эмульгирования.

Если в рабочем диапазоне нагрузок режим работы аппарата не изменяется, зависимость коэффициента массопередачи от нагрузки можно считать линейной.

Предположим, что для разных параллельных аппаратов эта зависимость может быть представлена в виде

$$K_iF_i = K_{0i} + \alpha V_i + \beta L_i \qquad \text{(IV, 104)}$$

Задачу распределения, так же как и раньше, будем решать методом неопределенных множителей Лагранжа.

Определим полные первые производные dG_i/dV_i и dG_i/dL_i

$$\frac{dG_i}{dV_i}=\frac{d}{dV_i}\left[\psi\left(\frac{V_i}{K_iF_i},\ \frac{L_i}{K_iF_i}\right)K_iF_i\right]=\left(1-\alpha\frac{V_i}{K_iF_i}\right)\psi'_{\frac{V_i}{K_iF_i}}-$$

$$-\frac{\alpha L_i}{K_iF_i}\psi'_{\frac{L_i}{K_iF_i}}+\alpha\psi=f_1\left(\frac{V_i}{K_iF_i},\ \frac{L_i}{K_iF_i}\right)$$

$$\frac{dG_i}{dL_i}=\frac{d}{dL_i}\left[\psi\left(\frac{V_i}{K_iF_i},\ \frac{L_i}{K_iF_i}\right)K_iF_i\right]=-\frac{\beta V_i}{K_iF_i}\psi'_{\frac{V_i}{K_iF_i}}+ \qquad \text{(IV, 105)}$$

$$+\left(1-\beta\frac{L_i}{K_iF_i}\right)\psi'_{\frac{L_i}{K_iF_i}}+\beta\psi=f_2\left(\frac{V_i}{K_iF_i},\ \frac{L_i}{K_iF_i}\right)$$

Таким образом, так же как и в случае теплообменных аппаратов, система нелинейных уравнений Лагранжа (IV, 85) сводится к упрощенной системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{K_{0i}+\alpha V_i+\beta L_i}{V_i}=p\\ \dfrac{K_{0i}+\alpha V_i+\beta L_i}{L_i}=q\\ \sum\limits_{i=1}^{n}V_i=V_0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}L_i=L_0\quad i=1,\ 2,\ \dots,\ n\end{cases} \qquad \text{(IV, 106)}$$

решение которой имеет вид

$$V_i=\frac{V_0K_{0i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}K_{0i}}\qquad L_i=\frac{L_0K_{0i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}K_{0i}} \qquad \text{(IV, 107)}$$

В более широком диапазоне изменения нагрузок зависимость коэффициента массопередачи от нагрузки может быть представлена в виде

$$K=K_0V^{\gamma}L^{\delta} \qquad \text{(IV, 108)}$$

С достаточным основанием можно предположить, что различные параллельные агрегаты имеют разное значение постоянного коэффициента K_{0i} и разную поверхность массопередачи, а закон изменения коэффициента массопередачи от нагрузки для всех агрегатов одинаков и показатели γ и δ имеют одно и то же значение

$$K_iF_i=K_{0i}V_i^{\gamma}L_i^{\delta} \qquad \text{(IV, 109)}$$

Определим полные производные количества передаваемого компонента по нагрузке

$$\frac{dG_i}{dV_i}=\frac{d}{dV_i}\left[\psi\left(\frac{V_i}{K_iF_i},\ \frac{L_i}{K_iF_i}\right)K_iF_i\right]=$$

$$=(1-\gamma)\,\psi'_{\frac{V_i}{K_iF_i}}+\gamma\frac{K_iF_i}{V_i}\psi=f_1^*\left(\frac{V_i}{K_iF_i},\ \frac{L_i}{K_iF_i}\right)$$

$$\frac{dG_i}{dL_i}=\frac{d}{dL_i}\left[\psi\left(\frac{V_i}{K_iF_i},\ \frac{L_i}{K_iF_i}\right)K_iF_i\right]= \qquad \text{(IV, 110)}$$

$$=(1-\delta)\,\psi'_{\frac{L_i}{K_iF_i}}+\delta\frac{K_iF_i}{L_i}\psi=f_2^*\left(\frac{V_i}{K_iF_i},\ \frac{L_i}{K_iF_i}\right)$$

Подставив (IV, 110) в систему уравнений Лагранжа (IV, 85), приходим к упрощенной системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{K_{0i}V_i^{\gamma}L_i^{\delta}}{V_i}=p\\[2mm] \dfrac{K_{0i}V_i^{\gamma}L_i^{\delta}}{L_i}=q\\[2mm] \sum\limits_{i=1}^{n}V_i=V_0\\[2mm] \sum\limits_{i=1}^{n}L_i=L_0 \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\end{cases} \qquad \text{(IV, 111)}$$

Решение системы (IV, 111) имеет вид:

$$V_i=\frac{V_0K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}}{\sum\limits_{i=1}^{n}K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}}$$

$$L_i=\frac{L_0K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}}{\sum\limits_{i=1}^{n}K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}}$$

На основе рассмотренных задач можно окончательно сформулировать правила оптимального распределения нагрузок между параллельными абсорбционными аппаратами:

Между **одинаковыми** *аппаратами нагрузки распределяют поровну.*

При изотермической абсорбции или неизотермической абсорбции, позволяющей принять упрощающие предположения (стр. 116, 117), и при **постоянных** *коэффициентах массопередачи*

ТАБЛИЦА 5

Принципы оптимального распределения нагрузок между типовыми агрегатами химической промышленности

№ п/п	Агрегаты	Критерий оптимизации	Вид характеристики	Необходимая информация		Принципы оптимального распределения	
				характеристики или константы	определяющие параметры	для одинаковых агрегатов	для разных агрегатов
1	Насосы центробежные	Минимальные затраты энергии при заданной нагрузке	Выпуклая	Характеристика затрат или наклон характеристики затрат в области максимальных нагрузок	—	Максимальная загрузка всех агрегатов, кроме одного, произвольно выбранного	Максимальная загрузка всех агрегатов, кроме одного, имеющего наибольший наклон характеристики
2	Насосы поршневые	То же	Вогнутая	Характеристика затрат	—	Равные нагрузки	Решение системы уравнений $\begin{cases} \frac{dN_i}{dQ_i} = \lambda \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i = Q_0 \end{cases}$
3	Компрессоры центробежные	»	Линейная	Наклон характеристики затрат	—	Произвольные нагрузки	Максимальная загрузка всех агрегатов, кроме одного, имеющего наибольший наклон характеристики
4	Компрессоры поршневые	»	»	»	—	То же	То же

	То же	»	Выпуклая	Характеристика затрат	—	Максимальная загрузка всех агрегатов, кроме одного, произвольно выбранного	То же
5	Теплообменные аппараты	Максимальная теплопередача при заданных нагрузках по продукту V_0 и теплоносителю L_0	»	Коэффициент теплопередачи K_i	—	Равные нагрузки	$V_i = \frac{V_0 K_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i}$ $L_i = \frac{L_0 K_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i}$
	То же	То же	»	—	Температура на выходе из теплообменника $t_{\text{к}i}$	То же	Равенство температур на выходе $t_{\text{к}1}=t_{\text{к}2}= \ldots =t_{\text{к}n}$
6	Абсорбционные аппараты	Максимальная передача вещества из одной фазы в другую при заданных нагрузках V_0 и L_0	»	Коэффициент массопередачи K_i	—	То же	$V_i = \frac{V_0 K_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i}$ $L_i = \frac{L_0 K_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i}$
	То же	То же	»	—	Концентрация передаваемого вещества на выходе из абсорбера $Y_{\text{к}i}$	То же	Равенство концентраций на выходе $Y_{\text{к}1} = Y_{\text{к}2} = \ldots = Y_{\text{к}n}$

нагрузки следует распределять пропорционально произведению коэффициента массопередачи на поверхность массопередачи.

Между абсорбционными аппаратами, коэффициент массопередачи которых ***линейно*** *зависит от нагрузки, распределение должно быть пропорционально постоянным составляющим коэффициента массопередачи*

$$V_i = \frac{V_0 K_{0i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_{0i}} \qquad L_i = \frac{L_0 K_{0i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_{0i}} \qquad \text{(IV, 107)}$$

Между абсорбционными аппаратами, коэффициент массопередачи которых ***экспоненциально*** *зависит от нагрузки, распределение пропорционально постоянной составляющей коэффициента массопередачи в степени* $\frac{1}{1-\gamma-\delta}$

$$V_i = \frac{V_0 K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}} \qquad L_i = \frac{L_0 K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_{0i}^{\frac{1}{1-\gamma-\delta}}} \qquad \text{(IV, 112)}$$

Соотношение газового и жидкостного потоков должно быть одинаковым

$$\frac{V_1}{L_1} = \frac{V_2}{L_2} = \cdots = \frac{V_n}{L_n} \qquad \text{(IV, 113)}$$

Определяющие параметры (концентрации абсорбируемого компонента на выходе из абсорберов) должны быть одинаковыми

$$Y_{\text{к}1} = Y_{\text{к}2} = \cdots = Y_{\text{к}n}$$
$$X_{\text{к}1} = X_{\text{к}2} = \cdots = X_{\text{к}n} \qquad \text{(IV, 114)}$$

Примеры распределеиия иагрузок между параллельными абсорбционными аппаратами иа осиоваиии экспериментальиых коэффициеитов массопередачи будут приведены в главе VII.

Таким образом, принципы распределеиия иагрузок между рассмотреииыми в данной главе типовыми агрегатами химической технологии достаточно просты. Для иаглядиости они сведеиы в табл. 5 (считается, что для теплообмеииых и абсорбциоиных аппаратов $F_1 = F_2 = \ldots = F_n$).

ГЛАВА V

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК МЕЖДУ РЕАКТОРАМИ

В крупных химических производствах часто применяются системы параллельно работающих реакторов. Необходимость применения таких систем связана не только с требованиями большей производительности и надежности, но иногда бывает обусловлена технологией химического процесса.

В особенности это относится к некоторым каталитическим процессам, сопровождающимся настолько быстрым падением активности катализатора, что время реакции и время, необходимое для регенерации катализатора, оказываются соизмеримыми. В этом случае для сохранения непрерывности производства необходимо иметь как минимум два параллельно работающих реактора, цикл работы которых согласовывается таким образом, что в то время, когда в одном из реакторов происходит регенерация катализатора, в другом протекает реакция и наоборот [32].

Для оптимального распределения нагрузок между параллельными реакторами необходимо знать зависимость производительности реактора от нагрузки. Точное определение этой зависимости представляет собой весьма трудную задачу ввиду сложности протекающих в реакторах процессов, сочетающих процессы теплообмена, массообмена и химической кинетики [89–93].

Поэтому здесь будут рассмотрены зависимости производительности от нагрузки для некоторых идеальных моделей, широко применяющихся для исследования технологических процессов и называемых реакторами идеального смешения и идеального вытеснения.

Реактором идеального смешения называется аппарат, обеспечивающий мгновенное и идеальное смешение поступающих частиц с частицами, находящимися внутри аппарата. Состав продукта во всем объеме аппарата идеального смешения постоянен и в установившемся режиме с течением времени не меняется. В качестве примера аппарата, близкого к реактору идеального смешения, можно привести реактор с мешалкой.

В аппарате идеального вытеснения происходит поршневое перемещение вещества без перемешивания: частицы покидают аппарат в том же порядке, в каком поступают. Физической

моделью реактора идеального вытеснения может служить трубчатый реактор, длина которого значительно превосходит диаметр. Модель идеального вытеснения также используется для исследования реакторов с плотным слоем катализатора.

Основой математического описания реактора служат уравнения кинетики протекающих в нем реакций[94, 95]. Пусть стехиометрическое уравнение реакции имеет вид:

$$\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \cdots + \nu_n A_n \rightarrow \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \cdots \mu_m B_m \qquad (V, 1)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — исходные реагенты; $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — продукты реакции.

Скорость химической реакции r зависит от концентраций исходных реагентов C_{A_i} и продуктов реакции C_{B_i}

$$r = f\left(C_{A_1}, C_{A_2}, \ldots, C_{A_n}, C_{B_1}, C_{B_2}, \ldots, C_{B_m}\right) \qquad (V, 2)$$

Довольно часто скорость химической реакции приближенно определяется выражением типа

$$r = KC_{A_1}^{p_1} C_{A_2}^{p_2} \cdots C_{A_n}^{p_n} \qquad (V, 3)$$

где K — константа скорости реакции, определяющая скорость протекания реакции при концентрациях исходных веществ, равных 1 *моль/л*.

Сумма показателей степеней называется порядком реакции

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \qquad (V, 4)$$

Порядок реакции, как правило, определяется из опыта. Обычно он не превышает трех и может быть как целым, так и дробным числом.

По механизму протекания реакции разделяются на простые и сложные. Простые реакции протекают в одну стадию; сложные, в свою очередь, состоят из параллельных и последовательных реакций.

Скорость химической реакции, как правило, возрастает с увеличением температуры. Зависимость константы скорости от температуры определяется уравнением Аррениуса

$$K = K_0 e^{-\frac{E}{RT}} \qquad (V, 5)$$

где T — абсолютная температура; E — постоянный параметр, называемый энергией активации; R — газовая постоянная; K_0 — постоянная величина.

Энергия активации большей части реакций составляет 10—100 *ккал/моль* и определяется на основании экспериментальных данных.

Рассмотрим проточный реактор идеального смешения, имеющий объем V_p; в него поступает w *м*^{3} сырья в 1 *ч*.

Пусть в реакторе протекает реакция, описываемая уравнением (V, 1). Считаем, что B_1 — целевой продукт реакции. Обозначим концентрацию целевого продукта B_1 на выходе из реактора через x.

Скорость образования продукта B_1 определяется уравнением кинетики

$$\frac{dx}{d\tau} = KC_{A_1}^{p_1} C_{A_2}^{p_2} \cdots C_{A_n}^{p_n} \qquad (V, 6)$$

Запишем уравнения материального и теплового баланса реактора в установившемся режиме, выразив концентрации всех продуктов реакции через концентрацию целевого продукта x

$$wx_0 - wx + V_p K \left(C_{A_10} - x\frac{\nu_1}{\mu_1}\right)^{p_1} \left(C_{A_20} - x\frac{\nu_2}{\mu_1}\right)^{p_2} \cdots \left(C_{A_n0} - x\frac{\nu_n}{\mu_1}\right)^{p_n} = 0 \qquad (V, 7)$$

$$wt_0 \sum_{i=1}^{n} C_{A_i0} c_{A_i} - wt\left[\sum_{i=1}^{n}\left(C_{A_i0} - x\frac{\nu_i}{\mu_1}\right)c_{A_i} + \sum_{i=1}^{m}\left(C_{B_i0} + x\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)c_{B_i}\right] +$$

$$+ V_p K\left(C_{A_10} - x\frac{\nu_1}{\mu_1}\right)^{p_1}\left(C_{A_20} - x\frac{\nu_2}{\mu_1}\right)^{p_2} \cdots \left(C_{A_n0} - x\frac{\nu_n}{\mu_1}\right)^{p_n} q_r - q_п = 0 \quad (V, 8)$$

где c_{A_i} — теплоемкость вещества A_i; q_r — теплота реакции; $q_п$ — тепловые потери; t_0 — начальная температура смеси; t — температура смеси в реакторе.

Величина x определяется путем совместного решения уравнений (V, 7 и V, 8); для изотермического реактора — путем решения уравнения (V, 7).

Рассмотрим теперь реактор идеального вытеснения, длина которого равна L. Протекающая в нем реакция описывается уравнением (V, 1). В установившемся режиме концентрации продуктов и температура меняются по длине реактора, но с течением времени остаются постоянными.

Обозначим через $\tilde{x}$ концентрацию целевого продукта в сечении реактора, находящемся на расстоянии l от входа. Тогда материальный и тепловой балансы элемента длины реактора dt (рис. 45) площадью поперечного сечения S можно записать так:

$$w\tilde{x} - w(\tilde{x} + dx) + K\left(C_{A_10} - \tilde{x}\frac{\nu_1}{\mu_1}\right)^{p_1}\left(C_{A_20} - \tilde{x}\frac{\nu_2}{\mu_1}\right)^{p_2} \cdots$$

$$\cdots \left(C_{A_n0} - \tilde{x}\frac{\nu_n}{\mu_1}\right)^{p_n} S\,dl = 0 \qquad (V, 9)$$

$$w\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(C_{A_i0} - \tilde{x}\frac{\nu_i}{\mu_1}\right)c_{A_i}t - \sum_{i=1}^{n}\left[C_{A_i0} - (\tilde{x} + dx)\frac{\nu_i}{\mu_1}\right]c_{A_i}(t + dt) +\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m}\left(C_{B_i0} + \tilde{x}\frac{\mu_i}{\mu_1}\right)c_{B_i}t - \sum_{i=1}^{m}\left[C_{B_i0} + (\tilde{x} + dx)\frac{\mu_i}{\mu_1}\right]c_{B_i}(t + dt)\right\} +$$

$$+ S\,dl K\left(C_{A_10} - \tilde{x}\frac{\nu_1}{\mu_1}\right)^{p_1}\left(C_{A_20} - \tilde{x}\frac{\nu_2}{\mu_1}\right)^{p_2} \cdots \left(C_{A_n0}\tilde{x}\frac{\nu_n}{\mu_1}\right)^{p_n} q_r - q_п S\,dl = 0 \qquad (V, 10)$$

где

$$K = K_0 e^{-\frac{E}{R(273+t)}}$$

Концентрация $\tilde{x}$ определяется интегрированием уравнений (V, 9) и (V, 10) при начальном условии

$$\tilde{x}(0) = 0$$

Для изотермического реактора величина $\tilde{x}$ определяется путем интегрирования уравнения (V, 9).

Производительность реактора находят по формуле

$$y = wx(w) \qquad (V, 11)$$

Интегрироваиие уравнеиий (V. 9), (V. 10) для ряда простых и сложиых реакций, протекающих в реакторах идеальиого смешеиия и идеальиого вытесиеиия, проводилось во многих работах. Обычио в литературе приводятся зависимости коицентрации целевого продукта иа выходе из реактора x от времени t, прошедшего с момеита начала реакции (периодический реактор смешеиия), или расстояния по длиие реактора l (реактор идеальиого вытесиеиия). Нас же интересует вид зависимости производительиости реактора от иагрузки.

Покажем, как связаиы между собой виды фуикций $x(t)$ и $y(w)$.

Рис. 45. Структуриая схема реактора идеальиого вытесиеиия.

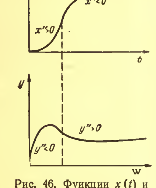


Рис. 46. Фуикции $x(t)$ и $y(w)$.

Если объем потока не меняется, время реакции обратио пропорциоиально нагрузке

$$t = \frac{V_p}{w} \qquad (V, 12)$$

где V_p — объем реактора.
Тогда

$$y(w) = x\left(\frac{V_p}{w}\right) w \qquad (V, 13)$$

Продифференцируем эту фуикцию

$$y'_w(w) = x\left(\frac{V_p}{w}\right) - x'_{\frac{V_p}{w}} \cdot \frac{V_p}{w}$$

$$y''_w(w) = \frac{V_p^2}{w^3} \cdot x''_{\frac{V_p}{w}} \cdot \frac{V_p}{w}$$

Таким образом, вторые производные $x''(t)$ и $y''(w)$ имеют одииаковый зиак, т. е. выпуклой фуикции $x(t)$ соответствует выпуклая фуикция $y(w)$ и, иаоборот, вогиутой функции $x(t)$ соответствует вогнутая функция $y(w)$.

Если функция $x(t)$ имеет перегиб в точке t^*, т. е. $x''(t^*) = 0$, то $y''(w^*) = 0$, т. е. функция $y(w)$, также имеет перегиб в точке $w^* = V_p/t^*$. При этом если функция $x(t)$ вогнута до перегиба и выпукла после него, то функция $y(w)$ выпукла до перегиба и вогнута после него.

Как видно из рис. 46, функции $x(t)$ и $y(w)$ могут существенно отличаться друг от друга по виду. В связи с этим определим зависимость производительности от нагрузки для изотермических реакторов идеального смешения и вытеснения.

Реакция нулевого порядка типа $A \to B$

Уравнение кинетики реакции

$$\frac{dx}{d\tau} = K$$

Так как скорость реакции не зависит от концентрации x, то как для реактора идеального смешения, так и для реактора идеального вытеснения материальный баланс описывается уравнением

$$xw - KV_p = 0$$

Отсюда концентрация целевого продукта на выходе из реактора

$$x = \frac{KV_p}{w}$$

Концентрация продукта реакции B увеличивается с уменьшением нагрузки до тех пор, пока не станет равной a (начальной концентрации вещества A). При этом нагрузка

$$w^* = \frac{KV_p}{a}$$

При нагрузках, меньших w^*, концентрация целевого продукта в реакторе остается постоянной, так как все вещество A успевает полностью превратиться в вещество B.

График зависимости производительности реактора от нагрузки состоит из двух линейных отрезков:

$$y(w) = \begin{cases} aw & \text{при} \quad w < \dfrac{KV_p}{a} \\ KV_p & \text{при} \quad w > \dfrac{KV_p}{a}, \end{cases} \qquad (V, 14)$$

При малых нагрузках производительность реактора растет пропорционально нагрузке, при больших — остается постоянной.

Вид функции $y(w)$ показан в приводимой ниже табл. 6.

№ п/п	Реактор	Реакции			Характеристики
		тип	порядок	скорость	x
1	2	3	4	5	6
1	Идеального смешения и идеального вытеснения	$A \rightarrow B$	0	K при $w < \frac{KV_р}{a}$ 0 при $w > \frac{KV_р}{a}$	a при $w < \frac{KV_р}{a}$ $\frac{KV_р}{w}$ при $w > \frac{KV_р}{a}$
2	Идеального смешения	$A \rightarrow B$	1	$K(a-x)$	$\frac{a}{\frac{w}{KV_р}+1}$
3	То же	$A \rightarrow B$	n	$K(a-x)^n$	—
4	» »	$A \underset{K_0}{\overset{K_п}{\rightleftarrows}} B$	1	$K_п(a-x)-K_0(b+x)$	$\frac{\frac{K_пV_р}{w}a-\frac{K_0V_р}{w}b}{1+\frac{K_пV_р}{w}+\frac{K_0V_р}{w}}$

реактора		График
y	y'	
7	8	9
aw при $w < \frac{KV_p}{a}$ KV_p при $w > \frac{KV_p}{a}$	a при $w < \frac{KV_p}{a}$ 0 при $w > \frac{KV_p}{a}$	
$\frac{a}{\frac{1}{KV_p} + \frac{1}{w}}$	$\frac{1}{\left(\frac{w}{KV_p} + 1\right)^2}$	$a = 1$
Из уравнения $\frac{y}{w} = \frac{KV_p}{w}\left(a - \frac{y}{w}\right)^n$	$\frac{y}{w} - \frac{\frac{KV_p}{w}\left(a - \frac{y}{w}\right)^n}{1 + \frac{KV_p n}{w}\left(a - \frac{y}{w}\right)^{n-1}}$	$a = 1$
$\frac{V_p(K_п a - K_0 b)\, w}{w + V_p(K_п + K_0)}$	$\frac{V_p^2 (K_п + K_0)(K_п a - K_0 b)}{[w + V_p(K_п + K_0)]^2}$	$K_0 = 0{,}5K_п,\ a = 1,\ b = 0$

№ п/п	Реактор	Реакции			Характеристики
		тип	порядок	скорость	x
1	2	3	4	5	6
5	Идеального вытеснения	$A \to B$	1	$K(a-x)$	$a\left(1-e^{\frac{-KV_p}{w}}\right)$
6	То же	$A \to B$	n	$K(a-x)^n$	$a\left[1-\left(1-\frac{KV_p(1-n)}{wa^{1-n}}\right)^{\frac{1}{1-n}}\right]$
7	» »	$A \underset{K_0}{\overset{K_п}{\rightleftarrows}} B$	1	$K_п(a-x)-K_0(b+x)$	$\frac{K_п a-K_0 b}{K_п+K_0}\times\left[1-e^{\frac{(K_п+K_0)V_p}{w}}\right]$
8	Идеального смешения	$A \xrightarrow{K_1} B$; $A \xrightarrow{K_2} C$	1	$r_1=K_1(a-x_b-x_c)$; $r_2=K_2(a-x_b-x_c)$	$x_B=\frac{aK_1V_p}{w+V_p(K_1+K_2)}$

реактора		График
y	y'	
7	8	9
$aw\left(1-e^{\frac{-KV_p}{w}}\right)$	$a\left[1-e^{\frac{-KV_p}{w}}\left(1+\frac{KV_p}{w}\right)\right]$	$\frac{y}{KV_p}$; 1,0; 0,5; 0; 1; 2; 3; 4; $\frac{W}{KV_p}$; $a = 1$
$aw\left[1-\left(1-\frac{KV_p(1-n)}{wa^{1-n}}\right)^{\frac{1}{1-n}}\right]$	$a\left[1-\left(1-\frac{KV_p(1-n)}{wa^{1-n}}\right)^{\frac{1}{1-n}}\right]-\frac{KV_p}{w}a^n\left[1-\frac{KV_p(1-n)}{wa^{1-n}}\right]^{\frac{n}{1-n}}$	$\frac{y}{KV_p}$; 1,0; 0,5; $n=1$; $n=2$; $n=3$; 0; 1; 2; 3; 4; $\frac{W}{KV_p}$; $a = 1$
$\frac{w(K_\text{п}a-K_0b_0)}{K_\text{п}+K_0}\times\left[1-e^{\frac{-(K_\text{п}+K_0)V_p}{w}}\right]$	$\frac{K_\text{п}a-K_0b}{K_\text{п}+K_0}\times\left[1-e^{\frac{-(K_\text{п}+K_0)V_p}{w}}\times\left(1+\frac{(K_\text{п}+K_0)V_p}{w}\right)\right]$	$\frac{y}{K_n V_p}$; 1,0; 0,5; 0; 1; 2; 3; 4; $\frac{W}{K_n V_p}$; $K_0 = 0{,}5K_\text{п}$, $a = 1$, $b = 0$
$y_B=\frac{aK_1V_pw}{w+V_p(K_1+K_2)}$	$y'_B=\frac{V_p^2K_1a(K_1+K_2)}{[w+V_p(K_1+K_2)]^2}$	$\frac{y}{K_1V_p}$; 1,0; 0,5; y_B; 0; 1; 2; 3; 4; $\frac{W}{K_1V_p}$; $K_2=0{,}5K_1$; $a=1$

№ п/п	Реактор	Реакции			Характеристики
		тип	порядок	скорость	x
1	2	3	4	5	6
9	Идеального смешения	$A \xrightarrow{K_1} B \xrightarrow{K_2} C$	1	$r_1 = K_1(a - x_b - x_c)$ $r_2 = K_2 x_b$	$x_B = \dfrac{a\left(\dfrac{V_p}{w}\right)K_1}{1 + \dfrac{V_p K_1}{w} + \left(\dfrac{V_p}{w}\right)^2 K_1 K_2}$ $x_C = \dfrac{a\left(\dfrac{V_p}{w}\right)^2 K_1 K_2}{1 + \dfrac{V_p K_1}{w} + \left(\dfrac{V_p}{w}\right)^2 K_1 K_2}$
10	Идеального вытеснения	$A \xrightarrow{K_1} B$ $A \xrightarrow{K_2} C$	1	$r_1 = K_1(a - x_b - x_c)$ $r_2 = K_2(a - x_b - x_c)$	$x_B = \dfrac{aK_1}{K_1 + K_2} \times \left(1 - e^{\frac{-(K_1 + K_2)V_p}{w}}\right)$
11	То же	$A \xrightarrow{K_1} B \xrightarrow{K_2} C$	1	$r_1 = K_1(a - x_b - x_c)$ $r_2 = K_2 x_b$	$x_B = \dfrac{aK_1}{K_2 - K_1} \times \left(e^{\frac{-K_1 V_p}{w}} - e^{\frac{-K_2 V_p}{w}}\right)$ $x_C = a \times \left(1 - \dfrac{K_2}{K_2 - K_1} \cdot e^{\frac{-K_1 V_p}{w}} + \dfrac{K_1}{K_2 - K_1} e^{\frac{-K_2 V_p}{w}}\right)$

реактора		График
y	y'	
7	8	9
$y_B = \dfrac{aV_pK_1}{1+\dfrac{V_pK_1}{w}+\left(\dfrac{V_p}{w}\right)^2 K_1K_2}$ $y_C = \dfrac{aV_p^2K_1K_2}{w+V_pK_1+\dfrac{V_p^2}{w}K_1K_2}$	$y'_B = \dfrac{\dfrac{aV_pK_1}{w}\left(\dfrac{V_pK_1}{w}+\dfrac{2V_p}{w^2}K_1K_2\right)}{\left(1+\dfrac{V_pK_1}{w}+\dfrac{V_p^2}{w^2}K_1K_2\right)^2}$ $y'_C = \dfrac{\dfrac{aV_p^2}{w^2}K_1K_2\left(\dfrac{V_p^2}{w^2}K_1K_2-1\right)}{\left(1+\dfrac{V_pK_1}{w}+\dfrac{V_p^2}{w^2}K_1K_2\right)^2}$	$\frac{y}{K_1V_p}$; 1,0; 0,5; y_B; y_C; 0 1 2 3 4 5 $\frac{W}{K_1V_p}$ $K_2=0{,}5K_1$; $a=1$
$Y_B = \dfrac{aK_1w}{K_1+K_2}\times\left(1-e^{\frac{-(K_1+K_2)V_p}{w}}\right)$	$y'_B = \dfrac{aK_1}{K_1+K_2}\times\left[1-e^{\frac{-(K_1+K_2)V_p}{w}}\times\left(1+\dfrac{K_1+K_2}{w}V_p\right)\right]$	$\frac{y}{K_1V_p}$; 1,0; 0,5; 0 1 2 3 4 $\frac{W}{K_1V_p}$ $K_2=0{,}5K_1$; $a=1$
$y_B = \dfrac{awK_1}{K_2-K_1}\times\left(e^{\frac{-K_1V_p}{w}}-e^{\frac{-K_2V_p}{w}}\right)$ $y_C = aw\times\left(1-\dfrac{K_2}{K_2-K_1}e^{\frac{-K_1V_p}{w}}+\dfrac{K_1}{K_2-K_1}e^{\frac{-K_2V_p}{w}}\right)$	$y'_B = \dfrac{aK_1}{K_2-K_1}\times\left[\left(1+\dfrac{K_1V_p}{w}\right)e^{\frac{-K_1V_p}{w}}-\left(1+\dfrac{K_2V_p}{w}\right)e^{\frac{-K_2V_p}{w}}\right]$ $y'_C = a\times\left[1-\dfrac{K_2}{K_2-K_1}\times\left(1+\dfrac{K_1V_p}{w}\right)e^{\frac{-K_1V_p}{w}}+\dfrac{K_1}{K_2-K_1}\times\left(1+\dfrac{K_2V_p}{w}\right)e^{\frac{-K_2V_p}{w}}\right]$	$\frac{y}{K_1V_p}$; 1,0; 0,5; y_B; y_C; 0 W^* W^{**} 1 2 3 4 $\frac{W}{K_1V_p}$ $K_2=0{,}5K_1$; $a=1$

Реакция первого порядка $A \to B$

Скорость реакции определяется выражением

$$\frac{dx}{d\tau} = K(a - x)$$

где a — начальная концентрация продукта A.

Уравнение материального баланса реактора идеального смешения имеет вид:

$$-wx + KV_p(a - x) = 0$$

Отсюда

$$x = \frac{a\dfrac{KV_p}{w}}{1 + \dfrac{KV_p}{w}}$$

Производительность реактора

$$y = xw = \frac{aKV_p}{1 + \dfrac{KV_p}{w}} \qquad (V, 15)$$

Для элемента длины реактора идеального вытеснения уравнение материального баланса по продукту B имеет вид:

$$w\tilde{x} - w(\tilde{x} + d\tilde{x}) + KS\,dl\,(a - \tilde{x}) = 0 \qquad (V, 16)$$

где S — площадь поперечного сечения реактора.

Интегрируя уравнение (V, 16), получаем

$$x = a\left(1 - e^{\frac{-KV_p}{w}}\right)$$

Производительность реактора

$$y = aw\left(1 - e^{\frac{-KV_p}{w}}\right) \qquad (V, 17)$$

Вид функций $y(w)$ для реакторов идеального смешения и вытеснения также изображен в приводимой ниже табл. 6. Обе функции выпуклые. При увеличении нагрузки производительность реакторов возрастает, стремясь к предельной $y_{пр} = aKV_p$.

Параллельные реакции первого порядка типа $A \xrightarrow{K_1} B,\ A \xrightarrow{K_2} C$

Первая реакция приводит к образованию целевого продукта B, вторая — к образованию побочного продукта C. Обозначим концентрацию целевого продукта реакции через x_1, а побочного

продукта через x_2. Скорости реакции определяются уравнениями

$$\frac{dx_1}{d\tau} = K_1 (a - x_1 - x_2)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = K_2 (a - x_1 - x_2)$$

Уравнения материального баланса реактора идеального смешения по целевому и побочному продуктам имеют вид:

$$\begin{cases} -wx_1 + K_1 V_р (a - x_1 - x_2) = 0 \\ -wx_2 + K_2 V_р (a - x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

Разрешая эту систему, получаем:

$$y_B = wx_1 = \frac{aK_1 V_р}{1 + \frac{(K_1 + K_2) V_р}{w}} \qquad (V, 18)$$

Для построения характеристики реактора идеального вытеснения необходимо проинтегрировать систему уравнений

$$\begin{cases} w\bar{x}_1 - w(\bar{x}_1 + dx_1) + SK_1\, dl\, (a - \bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0 \\ w\bar{x}_2 - w(\bar{x}_2 + d\bar{x}_2) + SK_2\, dl\, (a - \bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 0 \end{cases}$$

В результате получаем

$$y_B = \frac{aK_1 w}{K_1 + K_2}\left[1 - e^{\frac{-(K_1+K_2) V_р}{w}}\right] \qquad (V, 19)$$

Для других типов реакций зависимости $y(w)$ выводят тем же методом, что в рассмотренных примерах. В общем случае для построения модели реактора идеального смешения необходимо решить систему алгебраических уравнений, а для построения модели реактора идеального вытеснения — систему дифференциальных уравнений.

В табл. 6 приведены окончательные результаты расчетов — зависимости $y(w)$ для изотермических реакторов идеального вытеснения и смешения, в которых происходят реакции различных типов: необратимая реакция произвольного порядка, обратимая реакция, параллельные и последовательные реакции. По виду эти зависимости могут быть линейными, выпуклыми, иметь перегиб.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МЕЖДУ ИЗОТЕРМИЧЕСКИМИ РЕАКТОРАМИ

Будем считать, что цель оптимального распределения нагрузок — достичь максимальной производительности при заданной общей входной нагрузке системы параллельных агрегатов

$$\max \sum_{i=1}^{n} y_i(w_i) \qquad (V, 20)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0$$

Рассмотрим особенности распределения для реакций разных типов.

Реакция нулевого порядка

Скорость реакции нулевого порядка постоянна и не зависит от концентрации реагирующего вещества, поэтому при нагрузках, не превышающих $w^* = K_i V_{pi}$, зависимость производительности от нагрузки линейна как для реактора идеального смешения, так и для реактора идеального вытеснения:

$$y = aw \qquad (V, 21)$$

Наклон характеристики не зависит от константы скорости реакции или объема реактора.

Если нагрузка становится больше величины w^*, концентрация целевого продукта на выходе из реактора падает, производительность реактора не увеличивается, а остается постоянной (см. табл. 6):

$$y = KV_p \qquad (V, 22)$$

Поэтому при распределении нагрузок между реакторами необходимо соблюдать условия

$$w_i \leqslant w_i^* = K_i V_{pi} \qquad (V, 23)$$

Признаком нарушения этого условия может служить уменьшение концентрации целевого продукта на выходе из реактора:

$$x_i < 1 \qquad (V, 24)$$

При соблюдении ограничения (V, 23) распределение нагрузки может быть произвольным.

Таким образом, *оптимальное распределение нагрузок между реакторами, в которых протекает реакция нулевого порядка, определяется условием*

$$0 \leqslant w_i \leqslant K_i V_{pi} \qquad (V, 25)$$

При этом во всех реакторах реакция проходит до конца и степень превращения равна 100%. *В пределах выполнения условия* (V, 25) *нагрузки можно распределять произвольно.*

При нагрузках, превышающих $K_i V_{pi}$, *степень превращения не достигает* 100%.

Необратимая реакция произвольного порядка

Как видно из табл. 6, зависимость производительности от нагрузки для реакций 1-го, 2-го и т. д. порядка имеет выпуклый характер как для реакторов идеального смешения, так и для реакторов идеального вытеснения.

Поэтому оптимальное распределение нагрузок может быть получено путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dw_i} = \lambda \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = w_0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{V, 26}$$

На основании материалов, приведенных в табл. 6, можно сделать вывод о том, что концентрация целевого продукта на выходе из реакторов x зависит от отношения $w/(KV_p)$

$$x = \varphi\left(\frac{w}{KV_p}\right) \tag{V, 27}$$

Можно показать, что производные производительности по нагрузке y'_w также зависят от отношения $w/(KV_p)$. Действительно

$$y = wx = w\varphi\left(\frac{w}{KV_p}\right)$$

$$\frac{dy}{dw} = \varphi + \frac{w}{KV_p}\varphi'_{\frac{w}{KV_p}} = \psi\left(\frac{w}{KV_p}\right) \tag{V, 28}$$

Это позволяет существенно упростить систему уравнений (V, 26).

Записывая эту систему в виде

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dw_i} = \psi\left(\frac{w_i}{K_i V_{pi}}\right) = \lambda \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = w_0 \end{cases} \tag{V, 29}$$

и разрешая первое уравнение относительно $w_i/(K_i V_{pi})$, получаем

$$\frac{w_i}{K_i V_{pi}} = f(\lambda) = p \tag{V, 30}$$

В силу монотонности функции $\psi\left(\frac{w_i}{K_i V_{pi}}\right)$ уравнение имеет единственное решение.

Систему уравнений (V, 26) можно свести к более простому виду

$$\begin{cases} \frac{w_i}{K_i V_{pi}} = p \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = w_0 \end{cases} \tag{V, 31}$$

Ее решение

$$w_i = w_0 \frac{K_i V_{pi}}{\sum_{i=1}^{n} K_i V_{pi}} \qquad (V, 32)$$

означает, что при оптимальном распределении нагрузки должны быть пропорциональны произведению объема реактора на константу скорости реакции.

Реакторы могут различаться по величинам объемов V_{pi} либо по значениям констант скорости реакции K_i.

Особый практический интерес представляет распределение нагрузок между одинаковыми по конструкции реакторами, заполненными катализатором. Активность катализатора, пропорциональная скорости химической реакции, изменяется с течением времени частично под действием катализаторных ядов, присутствующих в сырье, частично под влиянием физического истирания и спекания катализатора. Если активность катализатора изменяется медленно, можно считать, что константы скорости реакции постоянны. Если же скорость изменения активности катализатора велика, то при решении задачи распределения необходимо учитывать зависимость константы скорости реакции от времени. Этот случай будет рассмотрен в дальнейшем. В настоящем разделе будем считать, что константы скорости реакций — постоянные величины.

В том случае, когда объемы реакторов одинаковы

$$V_{p1} = V_{p2} = \cdots = V_{pn}$$

нагрузки следует распределять пропорционально константам скорости реакции

$$w_i = \frac{w_0 K_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i} \qquad (V, 33)$$

Если же состояние катализатора одинаково

$$K_1 = K_2 = \cdots = K_n$$

нагрузки распределяются поровну

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_n = \frac{w_0}{n} \qquad (V, 34)$$

Необходимо также отметить, что поскольку во всех рассмотренных случаях концентрация целевого продукта на выходе из реактора x_i зависит только от отношения $w_i/(K_i V_{pi})$ (см. табл. 6), то при оптимальном распределении нагрузок концентрации целевого продукта на выходе из всех реакторов одинаковы. Это существенное обстоятельство будет использовано в дальнейшем при построении систем автоматического управления распределением нагрузки (см. гл. VII).

Таким образом, принципы оптимального распределения нагрузок между реакторами, в которых протекает необратимая реакция порядка $m \neq 0$, могут быть сформулированы следующим образом:

Между ***одинаковыми*** *реакторами при* ***одинаковой активности*** *катализатора нагрузку распределяют поровну*

$$w_i = \frac{w_0}{n}$$

Между ***одинаковыми*** *реакторами при* ***разной активности*** *катализатора нагрузку распределяют пропорционально константе скорости реакции*

$$w_i = \frac{w_0 K_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i}$$

Между ***разными*** *реакторами нагрузку распределяют пропорционально произведению* $K_i V_{pi}$

$$w_i = w_0 \frac{K_i V_{pi}}{\sum_{i=1}^{n} K_i V_{pi}}$$

Определяющие параметры (концентрации целевого продукта на выходе из реактора) должны быть одинаковыми

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \tag{V, 35}$$

Обратимая реакция произвольного порядка

В случае обратимой реакции зависимость $y(w)$ также имеет выпуклую форму, а оптимальное распределение, так же как и ранее, может быть найдено на основе решения системы уравнений (V, 26). Производительность реактора зависит от констант скорости прямой $K_п$ и обратной $K_о$ реакций.

Так как действие катализатора на прямую и обратную реакции одинаково, отношение $K_п/K_о$ постоянно для всех реакторов

$$\frac{K_{пi}}{K_{оi}} = \alpha$$

Подставляя в выражение для dy/dw (см. табл. 6) величину $K_п/\alpha$ вместо константы $K_о$, получаем зависимость, аналогичную рассмотренной ранее

$$\frac{dy_i}{dw_i} = f\left(\frac{K_{пi}}{w_i}\right)$$

Поэтому при протекании в системе реакторов обратимой реакции нагрузки распределяют согласно принципам, сформулированным для реакторов, в которых протекает необратимая реакция.

Рассмотрим системы реакторов идеального смешения и идеального вытеснения, в которых протекают параллельные реакции первого порядка

$$A \xrightarrow{K_1} B$$

$$A \xrightarrow{K_2} C$$

Предполагая, что B — целевой, а C — побочный продукт реакции, считаем, что цель оптимального распределения заключается в том, чтобы достичь максимальной производительности параллельных реакторов по целевому продукту реакции B.

Как видно из табл. 6, зависимость производительности реактора от нагрузки имеет выпуклую форму, поэтому для нахождения оптимального распределения необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{B_i}}{dw_i} = \lambda \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = w_0 \end{cases} \qquad (V, 36)$$

Производная dy_{B_i}/dw_i зависит от констант скорости основной и побочной реакций K_1 и K_2. Однако, вследствие того что в разных реакторах соотношение скоростей основной и побочной реакций может быть различным, систему (V, 26) нельзя упростить так, как это было сделано в предыдущем случае.

Так, например, для параллельных реакций первого порядка, протекающих в реакторах идеального смешения, оптимальное распределение находят, решая систему квадратных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{aK_{1i}(K_{1i}+K_{2i})V_{pi}^2}{[w_i+(K_{1i}+K_{2i})V_{pi}]^2} = \lambda \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_i = w_0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

В более сложных случаях система может быть решена одним из способов, рассматривавшихся в гл. II (графически, с помощью аналоговой вычислительной машины и т. д.).

Рассмотрим упрощенный графический способ решения уравнений (V. 36) для системы из трех реакторов для случая, когда производительность реактора зависит от двух констант скорости

$$\frac{dy_i}{dw_i} = f\left(\frac{K_{1i}V_{pi}}{w_i}, \frac{K_{2i}V_{pi}}{w_i}\right) \qquad i = I, II, III \qquad (V, 37)$$

Построим линии уровня $\lambda = dy_i/dw_i$ этой поверхности (рис. 47, a).

Для каждого из агрегатов отношение K_{1i}/K_{2i} будет иметь разное значение. Из начала координат проведем прямые 0—*I*, 0—*II* и т. д. под углом $\operatorname{arc\,tg} \frac{K_{1i}}{K_{2i}}$ к оси абсцисс. Пересечение этих прямых с одной из кривых $\lambda = \text{const}$ определяет оптимальное распределение нагрузок. Если ординаты

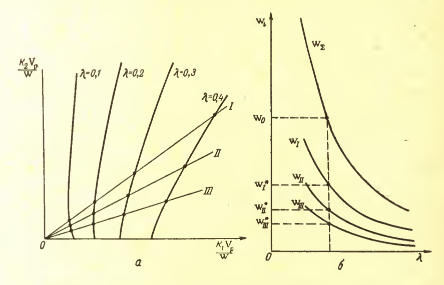


Рис. 47. Графическое решение задачи распределения нагрузок между двумя реакторами:

а — первый этап; *б* — второй этап.

точек пересечения лучей обозначить через $a_I(\lambda)$, $a_{II}(\lambda)$ и т. д., то оптимальные нагрузки, соответствующие данному λ, могут быть определены по формулам

$$w_i(\lambda) = \frac{K_{2i}V_{pi}}{a_i(\lambda)}$$

На график зависимости $w_i(\lambda)$ нанесем оптимальные нагрузки $w_I(\lambda)$, $w_{II}(\lambda)$, $w_{III}(\lambda)$ для разных λ (рис. 47, *б*). Суммируя эти нагрузки, проведем кривую общей нагрузки

$$w_\Sigma(\lambda) = \sum_{i=I}^{III} w_i(\lambda)$$

Абсцисса точки пересечения прямой w_0 с кривой $w_\Sigma(\lambda)$ определяет искомое λ, в свою очередь определяющее оптимальные нагрузки $\overset{*}{w}_I$, $\overset{*}{w}_{II}$, $\overset{*}{w}_{III}$.

Рассмотрим зависимость производной производительности реактора по нагрузке от концентраций целевого и побочного продуктов на выходе из реактора.

Для реактора идеального вытеснения

$$x_B = \frac{aK_1}{K_1 + K_2}\left(1 - e^{\frac{-(K_1+K_2)V_p}{w}}\right)$$
$$x_C = \frac{aK_2}{K_1 + K_2}\left(1 - e^{\frac{-(K_1+K_2)V_p}{w}}\right) \qquad (V, 38)$$

Выразив K_1 и K_2 через x_B и x_C и подставив эти величины в выражение для $\frac{dy_B}{dw}$ из табл. 6, получим

$$\frac{dy_B}{dw} = x_B\left(1 + \ln\frac{a}{a - x_B - x_C}\right) \qquad (V, 39)$$

Как видно из (V, 39), dy_B/dw представляет собой функцию концентраций целевого и побочного продуктов на выходе из реактора и не зависит в явном виде от нагрузки.

Для реактора идеального смешения производная производительности реактора по нагрузке может быть выражена через x_B и x_C

$$\frac{dy_B}{dw} = \frac{(x_B + x_C)\,x_B}{a} \qquad (V, 40)$$

Выражения (V, 39) и (V, 40) позволяют установить следующий признак оптимального распределения нагрузок между параллельными реакторами, в которых протекают реакции параллельного типа: при оптимальном распределении нагрузок некоторая функция концентраций продуктов на выходе из реактора (определяющий параметр) одинакова для всех реакторов.

Для реактора идеального вытеснения эта функция имеет вид:

$$x_{B_i}\left(1 + \ln\frac{a}{a - x_{B_i} - x_{C_i}}\right) = \lambda \qquad (V, 41)$$

Для реактора идеального смешения

$$x_{B_i}\left(x_{B_i} + x_{C_i}\right) = \mu \qquad (V, 42)$$

Этот вывод будет использован в гл. VII при построении систем управления параллельно работающими реакторами.

Последовательные реакции первого порядка

Рассмотрим реакторы, в которых протекают последовательные реакции первого порядка

$$A \xrightarrow{K_1} B \xrightarrow{K_2} C$$

Целевым продуктом реакции может быть как продукт B, так и продукт C. Зависимость производительности реактора по продуктам B и C от нагрузки приведена в табл. 6.

Из табл. 6 видно, что зависимость y_B от нагрузки представляет собой вогнуто-выпуклую кривую, а зависимость y_c от нагрузки — выпукло-вогнутую кривую с экстремумом C.

Так же как и в случае параллельных реакций, концентрация целевого продукта на выходе из реактора зависит от двух констант, причем влияние отравления катализатора на эти константы может быть различным. Это усложняет решение задачи распределения.

Пусть целевым продуктом реакции будет продукт B.

Тогда для реактора идеального вытеснения производительность реактора

$$y_B(w) = \frac{awK_1}{K_2 - K_1}\left(e^{\frac{-K_1 V_p}{w}} - e^{\frac{-K_2 V_p}{w}}\right)$$

Поскольку функция $y_B(w)$ вогнуто-выпуклая, для решения задачи распределения необходимо применять методы невыпуклого программирования (например, графический метод, описанный в гл. III). Однако, как правило, участок вогнутости лежит левее нижнего допустимого предела нагрузки, вследствие чего для решения задачи распределения, как и ранее, можно пользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа.

Система уравнений Лагранжа имеет вид:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{aK_{1i}}{K_{2i} - K_{1i}}\left[e^{\frac{-K_{1i}V_{pi}}{w_i}}\left(1 + \frac{K_{1i}V_{pi}}{w_i}\right) - e^{\frac{-K_{2i}V_{pi}}{w_i}}\left(1 + \frac{K_{2i}V_{pi}}{w_i}\right)\right] = \lambda \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}\right. \tag{V, 43}$$

Необходимо отметить, что производная производительности реактора по нагрузке является функцией двух величин: $\frac{K_1 V_p}{w}$ и $\frac{K_2 V_p}{w}$

$$\frac{dy_B}{dw} = \varphi\left(\frac{K_1 V_p}{w}, \frac{K_2 V_p}{w}\right) \tag{V, 44}$$

Концентрации продуктов реакции B и C на выходе из реактора также зависят от величин $\frac{K_1 V_p}{w}$ и $\frac{K_2 V_p}{w}$

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{aK_1}{K_2 - K_1}\left(e^{\frac{-K_1 V_p}{w}} - e^{\frac{-K_2 V_p}{w}}\right) = f_1\left(\frac{K_1 V_p}{w}, \frac{K_2 V_p}{w}\right) \\ x_C &= a\left(1 - \frac{K_2}{K_2 - K_1}e^{\frac{-K_1 V_p}{w}} + \frac{K_1}{K_2 - K_1}e^{\frac{-K_2 V_p}{w}}\right) = \\ &= f_2\left(\frac{K_1 V_p}{w}, \frac{K_2 V_p}{w}\right) \end{aligned} \tag{V, 45}$$

Разрешая уравнения (V, 45) относительно $\frac{K_1 V_p}{w}$ и $\frac{K_2 V_p}{w}$ и подставляя результат в (V, 44), получаем

$$\frac{dy_B}{dw} = F(x_B, x_C) \qquad \text{(V, 46)}$$

Таким образом, производная производительности реактора по нагрузке, так же как и в случае параллельных реакций, может быть выражена через концентрации продуктов B и C на выходе из реактора, и, следовательно, при оптимальном распределении нагрузок функции $F(x_{Bi}, x_{Ci})$ для всех параллельных реакторов должны принимать одинаковые значения.

В том случае, когда целевым продуктом реакции является продукт C, зависимость $y(w)$ имеет экстремум

$$y_C(w) = aw\left(1 - \frac{K_2}{K_2 - K_1} e^{\frac{-K_1 V_p}{w}} + \frac{K_1}{K_2 - K_1} e^{\frac{-K_2 V_p}{w}}\right) \qquad \text{(V, 47)}$$

Координата точки экстремума w^* определяется путем решения уравнения

$$\frac{dy_C}{dw} = a\left[1 - \frac{K_2}{K_2 - K_1}\left(1 + \frac{K_1 V_p}{w^*}\right) e^{\frac{-K_1 V_p}{w^*}} + \right.$$

$$\left. + \frac{K_1}{K_2 - K_1}\left(1 + \frac{K_2 V_p}{w^*}\right) e^{\frac{-K_2 V_p}{w^*}}\right] = 0 \quad \text{(V, 48)}$$

Нагрузка, большая w^*, не вызывает увеличения производительности реактора. Поэтому при оптимальном распределении должно соблюдаться ограничение

$$w_i \leqslant w_i^* \qquad \text{(V, 49)}$$

В интервале $[0, w_i^*]$ характеристика реактора имеет выпуклую форму, поэтому распределение нагрузок может осуществляться путем решения системы уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} \frac{dy_{C_i}}{dw_i} = \lambda \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = w_0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Так же как и в предыдущем случае, можно показать, что существует функция от выходных концентраций x_B, x_C, которая при оптимальном распределении имеет одно и то же значение для всех агрегатов.

Все закономерности, установленные для реакторов идеального вытеснения, справедливы и для реакторов идеального смешения.

В том случае, когда в реакторе протекает более сложная система параллельных и последовательных реакций, зависимость производительности от нагрузки может иметь несколько экстремумов и перегибов. Для решения задачи распределения в этом случае можно применять численные методы, основанные, например, на методе динамического программирования. Однако легко показать, что и в случае сложной системы реакций можно построить такую функцию F, зависящую только от концентраций продуктов на выходе из реактора, которая при оптимальном распределении нагрузок имеет одинаковое значение для всех параллельно работающих аппаратов. Рассмотрим реактор идеального вытеснения, в котором протекает химический процесс, описываемый уравнениями

$$M\bar{x} = 0 \tag{V, 50}$$

$$\frac{dx_j}{dl} = \frac{K_j}{w} f_j(x_1, x_2, \ldots, x_r) \tag{V, 51}$$

$$j = 1, 2, \ldots, s \qquad r \geqslant s$$

где M — матрица стехиометрических коэффициентов, имеющая s строк и r столбцов; $\bar{x}$ — вектор, составляющими которого являются концентрации веществ, принимающих участие в реакции; r — число веществ, участвующих в реакции; s — число реакций.

Выберем s ключевых компонентов, имеющих концентрации $x_1, x_2, \ldots, x_s$, и выразим концентрации остальных веществ через $x_1, x_2, \ldots, x_s$ из системы стехиометрических уравнений (V, 50). Система уравнений кинетики запишется в виде

$$\frac{dx_j}{dl} = \frac{K_j}{w} f_j(x_1, x_2, \ldots, x_s) \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{V, 52}$$

Интегрируя систему уравнений (V, 52), можно получить зависимость концентраций продуктов на выходе из реактора от нагрузки в виде функций:

$$x_j = \psi_j\left(\frac{K_1}{w}, \frac{K_2}{w}, \ldots, \frac{K_s}{w}\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{V, 53}$$

Производная производительности по нагрузке

$$\frac{dy_j}{dw} = x_j + w\frac{dx_j}{dw} = x_j + \sum_{i=1}^{s}\left(\psi'_{j, \frac{K_i}{w}}\frac{K_i}{w}\right) = x_j + \varphi\left(\frac{K_1}{w}, \frac{K_2}{w}, \ldots, \frac{K_s}{w}\right) \tag{V, 54}$$

Из системы уравнений (V, 53) выразим величины K_j/w через $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и подставим их в выражение (V, 54)

$$\frac{dy_j}{dw} = F(x_1, x_2, \ldots, x_s) \tag{V, 55}$$

Таким образом, *если для сложной системы реакций можно показать, что в рабочем диапазоне нагрузок зависимость произ-*

водительности реактора от нагрузки имеет выпуклую форму, то признаком оптимального распределения может служить равенство определяющих параметров (функций F от концентраций продуктов на выходе из параллельных реакторов).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МЕЖДУ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИМИ РЕАКТОРАМИ

Рассмотрим неизотермический реактор идеального вытеснения, в котором температура T изменяется вдоль длины реактора по известному закону, не зависящему от нагрузки реактора

$$T = \varphi(l) \qquad (V, 56)$$

где l — расстояние от входа в реактор.

Для простоты будем считать, что в реакторе протекает реакция, зависящая от одной константы

$$r = Kf(x) \qquad (V, 57)$$

Зависимость константы скорости реакции от температуры выражается уравнением Аррениуса

$$K = K_0 e^{-\frac{E}{RT}}$$

Запишем уравнение материального баланса для элемента dl длины реактора идеального вытеснения

$$\frac{dx}{dl} = \frac{SK_0}{w} e^{-\frac{E}{RT}} f(x) \qquad (V, 58)$$

и проинтегрируем его вдоль всей длины реактора L

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{dx}{f(x)} = \frac{SK_0}{w} \int_0^L e^{-\frac{E}{R\varphi(l)}} dl \qquad (V, 59)$$

Обозначив через $K_{ср}V_р$ постоянную величину $K_0 S \int_0^L e^{-\frac{E}{R\varphi(l)}} dl$, запишем выражение (V, 59) в виде

$$\psi(x) = \frac{K_{ср}V_р}{w} \qquad (V, 60)$$

Тогда концентрация целевого продукта на выходе из реактора

$$x = \psi^{-1}\left(\frac{K_{ср}V_р}{w}\right) \qquad (V, 61)$$

и производительность реактора

$$y = xw = w\psi^{-1}\left(\frac{K_{ср}V_р}{w}\right) \qquad (V, 62)$$

Таким образом, уравнение, определяющее зависимость производительности от нагрузки для неизотермического реактора

имеет тот же вид, что и для изотермического реактора. Отсюда следует, что и оптимальное распределение нагрузок между неизотермическими реакторами должно осуществляться согласно тому же принципу, что и между изотермическими реакторами, с тем отличием, что в формулу (V, 32) вместо $K_i V_{\text{р}i}$ следует подставлять $K_{\text{ср}i} V_{\text{р}i}$. Величина $K_{\text{ср}i} V_{\text{р}i}$, зависящая от активности катализатора и размеров реактора, является характеристической константой реактора при распределении нагрузок.

Между параллельными неизотермическими реакторами, температурный профиль которых известен и не зависит от нагрузки, нагрузка распределяется пропорционально величинам $K_{\text{ср}i} V_{\text{р}i}$

$$w_i = \frac{w_0 K_{\text{ср}i} V_{\text{р}i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_{\text{ср}i} V_{\text{р}i}} \tag{V, 63}$$

Так же как и ранее, при оптимальном распределении нагрузок определяющие параметры (концентрации целевого продукта на выходе из реакторов) одинаковы

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \tag{V, 64}$$

Рассмотрим адиабатический реактор идеального смешения. В реакторе протекает реакция $A \to B$, кинетика которой описывается уравнением

$$r = K_0 e^{-\frac{E}{RT}} \varphi(x) \tag{V, 65}$$

Концентрация вещества A на входе в реактор равна 1. Материальный баланс реактора

$$x = \frac{K_0 V_{\text{р}}}{w} e^{-\frac{E}{RT}} \varphi(x) \tag{V, 66}$$

Тепловой баланс реактора

$$c_1 t_0 + qx = (1 - x) c_1 t + x c_2 t \tag{V, 67}$$

где c_1, c_2 — теплоемкости сырья и целевого продукта реакции; q — тепловой эффект реакции; t_0 — температура смеси, поступающей в реактор; t — температура в реакторе.

Из уравнения (V, 67) можно определить зависимость температуры в реакторе от концентрации целевого продукта на выходе из реактора

$$t = \frac{c_1 t_0 + qx}{c_1 (1 - x) + c_2 x} = f(x) \tag{V, 68}$$

Подставляя значение t в (V, 66) и разрешив его относительно x, получим, что x зависит от двух переменных величин: отношения K_0/w и энергии активации E

$$x = \Phi\left(\frac{K_0}{w}, E\right) \tag{V, 69}$$

Производительность реактора

$$y = xw = w\Phi\left(\frac{K_0}{w},\ E\right) \qquad \text{(V, 70)}$$

Вид функции $y(w)$ зависит от вида уравнения кинетики, от теплового эффекта реакции и энергии активации E. Так, например, для эндотермической реакции первого порядка $(q < 0)$ функция $y(w)$ выпуклая, а для экзотермической реакции первого порядка $(q > 0)$ — имеет максимум и точку перегиба (рис. 48). Очевидно, что экстремум кривой $y(w)$ определяет максимальную допустимую нагрузку реактора w^*, так как при дальнейшем увеличении входной нагрузки производительность реактора снижается.

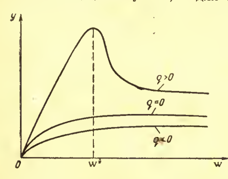


Рис. 48. Характеристика адиабатического реактора.

Если функция $y(w)$ в области допустимых нагрузок выпуклая, то для решения задачи распределения может быть применен метод неопределенных множителей Лагранжа. Будем считать, что различие активности катализатора для разных реакторов проявляется в разной величине предэкспоненциальных членов K_{0i}, а энергии активации и размеры реакторов одинаковы

$$K_i = K_{0i} e^{-\frac{E}{RT}} \qquad \text{(V, 71)}$$

Тогда производная производительности реактора по нагрузке зависит только от соотношения K_{0i}/w_i

$$\frac{dy_i}{dw_i} = F\left(\frac{K_{0i}}{w_i}\right) \qquad \text{(V, 72)}$$

Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным ранее, приходим к выводу, что в этом случае при оптимальном распределении нагрузки пропорциональны K_{0i}

$$w_i = \frac{w_0 K_{0i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_{0i}} \qquad \text{(V, 73)}$$

и концентрации целевого продукта на выходе из реакторов одинаковы

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \qquad \text{(V, 74)}$$

Так как, согласно (V, 68), температуры в реакторах зависят от концентраций x, то при оптимальном распределении эти температуры также одинаковы

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_n \tag{V, 75}$$

Таким образом, оптимальное распределение нагрузок между адиабатическими реакторами подчиняется законам, выведенным для изотермических реакторов. Однако у адиабатических реакторов есть еще один признак оптимальности распределения нагрузок — равенство температур на выходе из реакторов.

Необходимо отметить, что условие (V, 71) ограничивает применимость описанного метода распределения. Действительно, если различие между реакторами проявляется и в разном значении энергии активации E_i, то система уравнений Лагранжа не допускает тех упрощений, которые были возможны в предыдущих случаях, и должна решаться одним из общих методов, описанных в гл. III.

Полученные выводы легко распространить на реактор идеального вытеснения. Материальный баланс элемента длины реактора

$$\frac{d\bar{x}}{dl} = \frac{K_0 S}{w} e^{-\frac{E}{RT}} \varphi(\bar{x}) \tag{V, 76}$$

где $\bar{x}$ — концентрация целевого продукта в произвольном сечении реактора.

Уравнение теплового баланса для части реактора от входа до произвольного сечения l

$$c_1 t_0 + q\bar{x} = (1 - \bar{x}) c_1 \bar{t} + \bar{x} c_2 \bar{t} \tag{V, 77}$$

где $\bar{t}$ — температура в произвольном сечении реактора.

Откуда

$$\bar{t} = \frac{c_1 t_0 + q\bar{x}}{c_1 + (c_2 - c_1)\bar{x}} = f(\bar{x}) \tag{V, 78}$$

Подставляя (V, 78) в (V, 76), получаем

$$\frac{d\bar{x}}{dl} = \frac{K_0 S}{w} e^{-\frac{E}{R[273 + f(\bar{x})]}} \varphi(\bar{x}) \tag{V, 79}$$

Проинтегрировав уравнение (V, 79) по всей длине реактора и разрешив его относительно x, получим

$$x = F\left(\frac{K_0}{w}, E\right) \tag{V, 80}$$

Дальнейшие выводы аналогичны проведенным для реактора идеального смешения.

ТАБЛИЦА 7

Принципы оптимального распределения нагрузок между реакторами идеального вытеснения

№ п/п	Реакторы	Критерий оптимизации	Вид характеристики	Необходимая информация		Принципы оптимального распределения	
				константы	определяющие параметры	для одинаковых агрегатов	для разных агрегатов
1	Изотермический, реакция типа $A \xrightarrow{K} B$	Максимальная производительность при заданной нагрузке $\max \sum_{i=1}^{n} y_i$ $\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0$	Выпуклая	Константа скорости реакций K_i.		Равенство нагрузок $w_1 = w_2 = \ldots$ $\ldots = w_n = \frac{w_0}{n}$	Пропорциональность нагрузок константам скорости реакции: $w_i = \frac{w_0 K_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i}$
					Концентрация на выходе из реактора x	То же	Равенство концентраций x_i на выходе из реакторов $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$
2	Изотермический, параллельные реакции типа $A \xrightarrow{K_1} B$ $A \xrightarrow{K_2} C$	То же	То же	Константы скорости реакции K_1 и K_2		Равенство нагрузок $w_1 = w_2 = \ldots$ $\ldots = w_n = \frac{w_0}{n}$	Решение системы уравнений $\frac{dy_{B_i}}{dw_i} = \lambda$ $\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0$
					Концентрации продуктов B и C на выходе из реактора x_B и x_C	То же	Равенство функций от концентраций на выходе из реактора $x_{B_i}\left(1+\ln \frac{a}{a-x_{B_i}-x_{C_i}}\right)=\lambda$

3	Изотермический, последовательные реакции типа $A \xrightarrow{K_1} B \xrightarrow{K_2} C$	» »	» »	То же	То же	Равенство нагрузок $w_1 = w_2 = \ldots$ $\ldots = w_n = \frac{w_0}{n}$	В области рабочих нагрузок решение системы уравнений $\frac{dy_{C_i}}{dw_i} = \lambda$ $\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0$
					Концентрации продуктов B и C на выходе из реактора	То же	Равенство функций от концентраций на выходе из реактора $F\left(a, x_{B_i}, x_{C_i}\right) = \lambda$
4	Изотермический, система реакций типа $Mx = 0$ (M—матрица стехиометрических коэффициентов)	» »	» »	» »	Концентрации продуктов на выходе из реакторов $x_1, x_2 \ldots x_s$	Равенство нагрузок $w_1 = w_2 = \ldots$ $\ldots = w_n = \frac{w_0}{n}$	Равенство функций от концентраций продуктов на выходе из реактора $F(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{Si}) = \lambda$
5	Адиабатический, реакция типа $A \to B$	» »	» »	Константа скорости $K_{io} e^{-\frac{E}{RT}}$		Равенство нагрузок $w_1 = w_2 = \ldots$ $\ldots = w_n = \frac{w_0}{n}$	Нагрузки пропорциональны константам K_{0i} $w_i = \frac{w_0 \cdot K_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} K_{0i}}$
					Концентрация продукта B на выходе из реактора x или температура на выходе из реактора t	То же	Равенство концентраций x или температур на выходе из реактора t $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ или $t_1 = t_2 = \ldots = t_n$

Таким образом, можно сформулировать следующие принципы распределения нагрузок между адиабатическими реакторами:

Если функция $y(w)$ выпуклая и различие активности катализатора в разных реакторах проявляется в изменении предэкспоненциального множителя уравнения кинетики, то нагрузка распределяется пропорционально предэкспоненциальным множителям. При этом концентрации целевого продукта на выходе из реакторов x_i и температуры в реакторах t_i одинаковы.

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \tag{V, 81}$$

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_n \tag{V, 82}$$

Если функция $y'(w)$ выпуклая и изменение активности катализатора проявляется в изменении энергии активации, нагрузка распределяется в соответствии с решением системы уравнений Лагранжа (V, 26).

При выпукло-вогнутой функции $y(w)$ необходимо соблюдать условие $w < w^*$ (рис. 48).

Результаты решения задачи распределения нагрузок приведены в табл. 7, являющейся продолжением табл. 5. (Предполагается, что параллельные реакторы имеют одинаковые объемы).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МЕЖДУ РЕАКТОРАМИ С БЫСТРО ПАДАЮЩЕЙ АКТИВНОСТЬЮ КАТАЛИЗАТОРА

Особый интерес с точки зрения распределения нагрузок представляют системы параллельно работающих реакторов с быстро падающей активностью катализатора. Такие системы применяются, например, в производстве синтетического каучука (процесс дегидрирования изопентана и бутанов, дегидрирования бутиленов, изоамиленов, этилбензола, изопропилбензола и т. д.). Активность катализатора в этих процессах быстро изменяется в связи с отложением углистых остатков. Так, в производстве дивинила из бутилена активность катализатора падает за 4—7 *ч*, а в производстве дивинила из *н*-бутана — за 5—10 *мин*[33].

Для восстановления активности катализатора в этих процессах через реактор пропускают горячий пар или воздух, после чего активность катализатора восстанавливается почти полностью. Время регенерации колеблется от 5 *мин* до 1—2 *ч* в различных процессах. Для создания непрерывного процесса устанавливают параллельно несколько реакторов.

На рис. 49 показана временная диаграмма работы такой системы реакторов. Зачерненные участки соответствуют времени регенерации катализатора, светлые — времени работы реактора.

В то время, когда в одном из реакторов происходит регенерация катализатора, в остальных идет реакция. Пусть система регенерации катализатора работает непрерывно. Если время реакции T, а время регенерации τ, то к каждой непрерывно ра-

ботающей системе регенерации подключается m реакторов

$$m = \frac{T}{\tau} + 1 = \frac{T_ц}{\tau} \quad (V, 83)$$

где $T_ц$ — время цикла.

$$T_ц = T + \tau \quad (V, 84)$$

Одновременно работают n реакторов

$$n = m - 1 \quad (V, 85)$$

В этом случае распределение нагрузки зависит от кинетики реакции, протекающей в реакторе, и от характера изменения активности катализатора.

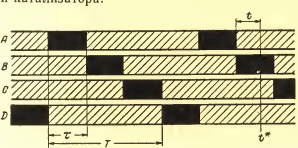


Рис. 49. Временна́я диаграмма работы системы реакторов с быстро падающей активностью катализатора.

Активность катализатора может уменьшаться с течением времени независимо от нагрузки реактора. Такой процесс называется «старением» катализатора. Уменьшение активности катализатора в зависимости от нагрузки реактора свидетельствует обычно об «отравлении» катализатора сырьем или продуктами реакции.

При быстром изменении активности катализатора нельзя не учитывать зависимость констант скорости реакции от времени (как это делалось раньше). Изменяется постановка задачи распределения, изменяются и методы ее решения [96].

Здесь будет рассмотрена задача распределения нагрузок при «старении» и «отравлении» катализатора.

Падение активности в зависимости от времени работы (старение)

Рассмотрим систему, состоящую из m реакторов и одного регенератора. Определим принципы распределения нагрузки между реакторами при следующих упрощающих предположениях:

1. Концентрация целевого продукта на выходе из реактора зависит от одной константы скорости.

2. Активность катализатора изменяется в зависимости от времени, прошедшего от начала реакции

$$K_i = f\left(t - t_i^0\right) \qquad (V, 86)$$

где t_i^0 — момент окончания последней регенерации катализатора в i-том реакторе.

3. После регенерации активность катализатора восстанавливается полностью.

Цель оптимального распределения нагрузок — обеспечить максимальную производительность системы реакторов за время цикла $T_ц$ при постоянной общей нагрузке системы w_0.

Найти $w_1(t)$, $w_2(t)$, ..., $w_n(t)$, максимизирующие функционал I

$$I = \int_0^{T_ц} \sum_{i=1}^{n} y_i[w_i(t), K_i(t)]\, dt \qquad (V, 87)$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(t) = w_0 \qquad (V, 88)$$

Задача управления (V, 87), (V, 88) является вариационной задачей. Так как подынтегральное выражение функционала (V, 87) не зависит от w_i', для достижения максимума этого функционала необходимо в любой момент времени обеспечить максимум подынтегрального выражения

$$\sum_{i=1}^{n} y_i[w_i(t), K_i(t)] \qquad (V, 89)$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(t) = w_0 \qquad (V, 90)$$

Как было показано ранее, в этом случае нагрузки должны распределяться пропорционально константам скорости реакции

$$w_i(t) = \frac{w_0 K_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} K_i(t)} \qquad (V, 91)$$

Рассмотрим оптимальное распределение нагрузки при различном характере изменения активности катализатора.

Линейное уменьшение активности

Пусть активность катализатора с течением времени уменьшается по линейному закону

$$K_i = K_0 (1 - \alpha t_i) \qquad (V, 92)$$

где K_0 — константа скорости реакции после регенерации; t_i — время работы i-того реактора после регенерации.

Отсчет времени будем вести с момента последнего переключения реакторов.

Пронумеруем реакторы в порядке очередности их подключения на регенерацию таким образом, чтобы первый реактор содержал самый «свежий» катализатор, работавший в течение времени $t (0 \leqslant t \leqslant \tau)$, второй реактор — катализатор, проработавший в течение времени $t_2 = t + \tau$, третий реактор — катализатор, проработавший в течение времени $t_3 = t + 2\tau$, и т. д. Тогда в момент времени t^* реактор A будет первым, реактор D — вторым, реактор C — третьим (см. рис. 49).

Константа скорости реакции:

в первом реакторе

$$K_1 = K_0 (1 - \alpha t) \tag{V, 93}$$

во втором реакторе

$$K_2 = K_0 [1 - \alpha (t + \tau)] \tag{V, 94}$$

в i-том реакторе

$$K_i = K_0 \{1 - \alpha [t + (i - 1) \tau]\} \tag{V, 95}$$

$$0 \leqslant t \leqslant \tau \qquad i = 1, 2, \ldots, n - 1$$

$$K_n = 0 \text{ (реактор на регенерации).} \tag{V, 96}$$

Ранее было показано, что при оптимальном распределении нагрузка реактора пропорциональна константе скорости реакции.

Следовательно, нагрузка i-того реактора

$$w_i (t) = \frac{w_0 K_i (t)}{\sum_{i=1}^{n} K_i (t)} = \frac{w_0 \{1 - \alpha [t + (i - 1) \tau]\}}{n \left[1 - \alpha \left(t + \frac{n-1}{2} \tau\right)\right]} \tag{V, 97}$$

На рис. 50, *а* сплошной линией показано линейное изменение активности катализатора, а на рис. 50, *б* сплошными линиями показано оптимальное изменение нагрузки реактора при линейном изменении активности. В приведенном примере за время работы реактора активность катализатора упала в 5 раз.

При переключении реакторов нагрузка скачкообразно уменьшается. В промежутках между переключениями нагрузка слабо растет в реакторе со свежим катализатором и слабо уменьшается в реакторе со старым катализатором.

Замедленное падение активности

Пусть скорость падения активности катализатора с течением времени уменьшается.

Закон изменения активности представим в виде экспоненты

$$K_i = K_0 e^{-\alpha [t + (i - 1) \tau]} \tag{V, 98}$$

Тогда нагрузка реактора

$$w_i(t) = w_0 \frac{e^{-\alpha (i-1) \tau}(1 - e^{-\alpha\tau})}{1 - e^{-\alpha n\tau}} \qquad (V, 99)$$

Как показано на рис. 50, *б* (пунктир), нагрузка реактора постоянна в интервалах работы между переключениями и уменьшается от свежего реактора к старому. Например, при уменьшении активности от начала до конца процесса в 5 раз оптимальная нагрузка уменьшается примерно со 140 до 60% от средней нагрузки.

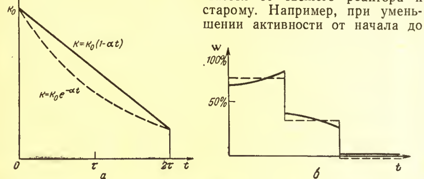


Рис. 50. Оптимальное распределение нагрузок между тремя реакторами, при старении катализатора:

а — изменение активности катализатора со временем; *б* — изменение нагрузки; ——— линейное падение; — — — замедленное падение.

Произвольное изменение активности

Характер изменения активности катализатора с течением времени часто имеет более сложную форму. Так, в начале работы активность катализатора может увеличиваться, а затем уменьшаться.

Если изменение активности катализатора описывается уравнением

$$K_i(t) = K_0 f[t - (i-1)\tau] \qquad (V, 100)$$

то нагрузка реактора при оптимальном распределении

$$w_i(t) = w_0 \frac{f[t + (i-1)\tau]}{\sum_{i=1}^{n} f[t + (i-1)\tau]} \qquad (V, 101)$$

Необходимо отметить, что при старении катализатора в течение всего цикла работы реакторов концентрация целевого продукта на выходе из реактора изменяется, однако в каждый данный момент времени концентрации целевых продуктов x_i во всех параллельных реакторах одинаковы.

Падение активности в зависимости от количества вещества, пропущенного через реактор
(отравление катализатора)

При отравлении поверхность катализатора блокируется прочным химически адсорбированным слоем отравляющего вещества, входящего в состав сырья или являющегося продуктом реакции. Уменьшение активности катализатора зависит от общего количества вещества, поступившего в реактор, либо от количества вещества, образовавшегося в реакторе в течение всего времени его работы. В том и другом случае в подынтегральное выражение входит функция, зависящая от $\int_0^t w_i\,dt$ или $\int_0^t y_i\,dt$; следовательно, вариационную задачу не удастся свести к задаче математического программирования, как в предыдущем параграфе.

Активность падает в зависимости от количества вещества, поступающего в реактор

Подобная картина отравления катализатора наблюдается тогда, когда в состав сырья входят примеси, отравляющие катализатор. Например, в производстве синтетического аммиака катализатор отравляется сернистыми и кислородосодержащими соединениями, причем при отравлении серосодержащими соединениями степень падения активности пропорциональна количеству поступившего в реактор вещества.

Как и ранее, предполагаем, что активность катализатора полностью восстанавливается после регенерации. Задача оптимального распределения ставится следующим образом: найти $w_1(t)$, $w_2(t)$, ..., $w_n(t)$, обеспечивающие максимум функционала I

$$I = \int_0^\tau \sum_{i=1}^n y_i(K_i,\ w_i(t))\,dt \qquad \text{(V, 102)}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n w_i(t) = w_0 \qquad \text{(V, 103)}$$

$$K_i = \psi\left[\int_0^\tau (w_1(t) + w_2(t) + \cdots + w_{i-1}(t))\,dt + \int_0^t w_i(t)\,dt\right] \qquad \text{(V, 104)}$$

Введем замену переменных. Пусть

$$\sum_{j=1}^{i-1} \int_0^\tau w_j(t)\,dt + \int_0^t w_i(t)\,dt = u_i(t) \qquad \text{(V, 105)}$$

Тогда задача управления будет ставиться так: найти $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$, обеспечивающие максимум функционала

$$I = \int_0^\tau \sum_{i=1}^n y_i [K_i, w_i(t)]\, dt = \int_0^\tau \sum_{i=1}^n \varphi_i \left[u_i(t),\ u_i'(t)\right] dt \qquad (V, 106)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n u_i'(t) = w_0 \qquad (V, 107)$$

$$u_1(0) = 0$$

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \qquad (V, 108)$$

Задача управления представляет собой вариационную задачу с незакрепленной правой частью и ограничением в виде равенства.

Используя классический метод вариационного исчисления [97], запишем выражение для функции Лагранжа с учетом ограничения (V, 107)

$$I^* = \int_0^\tau \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi\left(u_i,\ u_i'\right) + \lambda(t) \left[\sum_{i=1}^n u_i' - w_0 \right] \right\} dt \qquad (V, 109)$$

Система уравнений Эйлера для функционала I^* имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u_i'} + \lambda(t)\right] = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (V, 110)$$

Условия трансверсальности для ограничений (V, 108) запишутся в виде

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial u_1'} + \lambda \right|_{t=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial u_i'} + \lambda \right|_{t=0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial u_{i-1}'} + \lambda \right|_{t=\tau} \quad i = 2, 3, \ldots, n \qquad (V, 111)$$

Для нахождения оптимального распределения необходимо решить систему уравнений (V, 107), (V, 110), (V, 111).

Решение рассматриваемой вариационной задачи при большом числе агрегатов весьма затруднительно, даже при использовании вычислительной машины. В исследовании [45], где эта задача рассматривается в весьма общем виде, для решения предложено воспользоваться методом динамического программирования. Автор, однако, отмечает, что при числе агрегатов $N > 3$ решение задачи на вычислительной машине оказывается слишком громоздким.

Рассмотрим упрощенный вариант задачи (V, 102—V, 104), а именно, предположим, что нагрузки реакторов $w_1, w_2, \ldots, w_n$ постоянны от одного переключения до другого. Это предположение оправдано с инженерной точки зрения, так как устройство, обеспечивающее изменение нагрузки реакторов через интервалы времени τ, технически может быть осуществлено значительно проще, чем устройство, непрерывно изменяющее нагрузки вдоль экстремалей, являющихся решением исходной задачи (V, 102—V, 104).

Пусть производительность реактора

$$y_i = \varphi(K_i, w_i) \qquad (V, 112)$$

а активность катализатора зависит от количества прошедшего через реактор вещества

$$K_i = \psi\left[\int_0^{\tau}(w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1})\,dt + \int_0^{t} w_i\,dt\right] =$$
$$= \psi\,[(w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1})\,\tau + w_i t] \qquad (V, 113)$$

Проинтегрируем выражение (V, 102) при постоянных w_i

$$\int_0^{\tau}\sum_{i=1}^{n}\varphi(w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1},\ w_i t)\,dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau}\varphi(z_i,\ w_i t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\Phi(z_i,\ w_i) \qquad (V, 114)$$

где

$$z_i = w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1} \qquad (V, 115)$$

Выражение (V, 102) можно проинтегрировать аналитически или численно с помощью вычислительной машины. Так как подынтегральная функция $\varphi(z_i, w_i t)$ зависит только от двух неизвестных параметров: z_i и w_i, результатом интегрирования является двухмерная таблица значений функции $\Phi(z_i, w_i)$. Увеличение числа агрегатов n не повышает размерности подынтегрального выражения и не усложняет интегрирование.

Таким образом, вариационная задача (V, 102—V, 104) сводится к следующей задаче математического программирования: найти $w_1, w_2, \ldots, w_n$, обеспечивающие максимум выражения

$$y = \sum_{i=1}^{n}\Phi(z_i,\ w_i) \qquad (V, 116)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0 \qquad (V, 117)$$

где

$$z_i = w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1} \qquad (V, 118)$$

Для решения этой задачи может быть использован метод динамического программирования или (при условии выпуклости функции Ф) метод неопределенных множителей Лагранжа.

При использовании метода динамического программирования функциональные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} R_1(w_0) &= \max_{0 \leqslant w_1 \leqslant w_0} \Phi(0, w_1) = \Phi(0, w_0) \\ R_2(w_0) &= \max_{0 \leqslant w_2 \leqslant w_0} [\Phi(w_0 - w_2, w_2) + R_1(w_0 - w_2)] \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_n(w_0) &= \max_{0 \leqslant w_n \leqslant w_0} [\Phi(w_0 - w_n, w_n) + R_{n-1}(w_0 - w_n)] \end{aligned} \quad (V, 119)$$

При использовании метода неопределенных множителей Лагранжа необходимо решить систему алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial w_n}(w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1}, w_n) = \lambda \\ & \frac{\partial \Phi}{\partial w_{n-1}}(w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-2}, w_{n-1}) + \\ & \qquad + \frac{\partial \Phi}{\partial z_n}(w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1}, w_n) = \lambda \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \frac{\partial \Phi}{\partial w_1}(0, w_1) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial z_j}(w_1 + w_2 + \cdots + w_j, w_{j+1}) = \lambda \\ & \sum_{i=1}^{n} w_i = w_0 \end{aligned} \right. \quad (V, 120)$$

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из реакторов идеального вытеснения, в которых проходит реакция первого порядка.

Пусть активность катализатора падает линейно, пропорционально количеству прошедшего через реактор вещества

$$K_i = K_0 [1 - \alpha (w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1}) \tau - \alpha w_i t] \quad (V, 121)$$

Производительность реактора

$$y_i = w_i \left[1 - e^{-\frac{K_0 [1 - \alpha (w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1}) \tau - \alpha w_i t]}{w_i}} \right] \quad (V, 122)$$

Интегрируя производительность y_i от 0 до τ, получаем:

$$\Phi = \int_0^\tau y_i \, dt = \int_0^\tau w_i \left(1 - e^{-\frac{K_0 [1 - \alpha\tau (w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1}) - \alpha w_i t]}{w_i}} \right) dt =$$

$$= w_i \left[\tau - \frac{e^{K_0 \alpha t} - 1}{K_0 \alpha} e^{\frac{-K_0 [1 - \alpha\tau (w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1})]}{w_i}} \right] \quad (V, 123)$$

Необходимо найти распределение нагрузок $w_1, w_2, \ldots, w_n$, обеспечивающее максимум выражения

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Phi(z_i, w_i) = w_0 \tau - \frac{e^{K_0 \alpha t} - 1}{K_0 \alpha} \sum_{i=1}^{n} w_i e^{\frac{-K_0 [1 - \alpha\tau (w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1})]}{w_i}} \quad (V, 124)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0$$

Так как $w_0\tau$ и $\frac{e^{K_0\alpha t}-1}{K_0\alpha}$ — величины, не зависящие от w_i, задача [(V, 116) — (V, 118)] может быть заменена задачей отыскания распределения $w_1, w_2, \ldots, w_n$, обеспечивающего минимум выражения

$$I^* = \sum_{i=1}^{n} w_i e^{\frac{-K_0[1-\alpha\tau(w_1+w_2+\cdots+w_{i-1})]}{w_i}} \qquad \text{(V, 125)}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0$$

Пусть четыре реактора соединены параллельно. Тогда число одновременно работающих реакторов $n = 3$.

Будем решать задачу методом динамического программирования.

Функциональные уравнения имеют следующий вид:

$$R_1(w_0) = w_0 e^{-\frac{K_3}{w_3}}$$

$$R_2(w_0) = \min_{w_2}\left[w_2 e^{-\frac{K_0[1-\alpha(w_0-w_2)]}{w_2}} + (w_0 - w_2)e^{-\frac{K_0}{w_0-w_2}}\right] \qquad \text{(V, 126)}$$

$$R_3(w_0) = \min_{w_3}\left[w_3 e^{-\frac{K_3[1-\alpha(w_0-w_3)]}{w_3}} + R_2(w_0 - w_3)\right]$$

Принимаем для примера: $w_0 = 1$; $K_0 = 0,4$; $\alpha = 0,8$; $\tau = 1$.

От начала до конца процесса активность катализатора уменьшается в 5 раз

$$K_{3\tau} = K_0(1 - 0,8 \cdot 1) = 0,2K_0$$

Функциональные уравнения

$$R_1(w_0) = w_0 e^{-\frac{0,4}{w_0}}$$

$$0 \leqslant w_0 \leqslant 1$$

$$R_2(w_0) = \min_{0\leqslant w_2\leqslant 1}\left[w_2 e^{-\frac{0,4[1-0,8(w_2-w_2)]}{w_2}} + (w_0 - w_2)e^{-\frac{0,4}{w_2-w_2}}\right] \qquad \text{(V, 127)}$$

$$R_3(w_0) = \min_{0\leqslant w_3\leqslant 1}\left[w_3 e^{-\frac{0,4[1-0,8(1-w_3)]}{w_3}} + R_2(1 - w_3)\right]$$

На рис. 51, *а, б* показаны функции цели $R_1(w_0)$, $R_2(w_0)$ и соответствующие им оптимальные значения $w_1^{\text{опт}}(w_0), w_2^{\text{опт}}(w_0)$. На рис. 51, *в* графическим способом определен минимум функции

$$w_3 e^{-\frac{0,4[1-0,8(1-w_3)]}{w_3}} + R_2(1 - w_3)$$

Оптимальная нагрузка $w_3^* = 0{,}43$. По кривой $w_2(w_0)$ (рис. 51, *б*) определяем

$$w_2^* = w_2\,(1 - 0{,}43) = 0{,}30$$

Следовательно

$$w_1^* = 1 - w_2^* - w_3^* = 0{,}27$$

Рис. 51. Графическое решение задачи распределения нагрузок при отравлении катализатора.

График изменения нагрузок реакторов при вычисленном оптимальном распределении приведен на рис. 52. Как видно из рисунка, нагрузка реактора

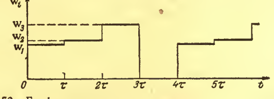


Рис. 52. График распределения нагрузок при отравлении катализатора.

должна увеличиваться от начала к концу процесса. Производительность реактора за цикл при равномерном распределении нагрузок составляет 0,494, при оптимальном — 0,504, т. е. увеличивается на 2%.

Интересно отметить, что если в этом случае распределять нагрузки, руководствуясь принципом, изложенным в предыдущих разделах (прямо пропорционально активности катализатора), решение будет весьма далеко от оптимального.

Действительно, пусть нагрузки агрегатов распределяются пропорционально активности катализатора

$$w_i = \frac{w_0 K_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i} \qquad (V, 128)$$

где

$$K_i = K_0 \left[1 - \alpha \int_0^{\tau} (w_1 + w_2 + \cdots + w_{i-1})\, dt - \alpha \int_0^{t} w_i\, dt \right] \qquad (V, 129)$$

Решая систему (V, 128—V, 129), получим, что

$$w_i = w_1 (1 - \alpha w_1)^{i-1} \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

Величину w_1 определяем из уравнения

$$w_1 = \frac{w_0 \tau}{n - \alpha w_1 \left[(n-1) + (n-2)(1 - w_1) + \cdots + (1 - w_1)^{n-2} \right]} \qquad (V, 130)$$

Для рассматриваемого примера $w_1 = 0{,}53$; $w_2 = 0{,}53(1 - 0{,}4 \cdot 0{,}53) = 0{,}3$; $w_3 = 0{,}3(1 - 0{,}4 \cdot 0{,}53)^2 = 0{,}17$.

При этом производительность реактора составит 0,452. По сравнению с равномерным распределением полученная производительность меньше на 9,6%, по сравнению с оптимальным — на 10,5%.

Активность падает в зависимости от количества прореагировавшего (или образовавшегося в реакторе) вещества

Если реакция имеет вид $A \to B + C$, где B — целевой продукт, а C — побочный продукт, отравляющий катализатор, то активность катализатора уменьшается пропорционально количеству прореагировавшего вещества. Примером может служить процесс отравления катализатора при дегидрировании бутана, бутилена и других углеводородов. Образующийся в результате реакции уголь покрывает катализатор, резко снижая его активность.

Сформулируем задачу:

найти нагрузки $w_1, w_2, \ldots, w_n$, максимизирующие функционал $I = \int_0^{\tau} \sum_{i=1}^{n} y_i\, dt$ при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0$$

$$y_i = \varphi(K_i, w_i) \qquad (V, 131)$$

$$K_i = \psi \left[\int_0^{\tau} (y_1 + y_2 + \cdots + y_{i-1})\, dt + \int_0^{t} y_i\, dt \right]$$

Заменим переменные в уравнениях (V, 131). Пусть

$$\int_0^t y_i \, dt = u_i(t) \qquad \text{(V, 132)}$$
$$u_i(0) = 0$$

Тогда задача (V, 131) запишется в виде

$$\max I = \max \sum_{i=1}^{n} u_i(\tau) \qquad \text{(V, 133)}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0$$

$$u_i' = \varphi\,[u_1(\tau) + u_2(\tau) + \cdots + u_{i-1}(\tau) + u_i(t), w_i] \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(V, 134)}$$

Как и в предыдущем случае, решение задачи распределения представляет большие сложности, поэтому рассмотрим упрощенный вариант: предположим, как и ранее, что нагрузки реакторов $w_1, w_2, \ldots, w_n$ постоянны от одного переключения до другого. Тогда дифференциальные уравнения (V, 134) станут обыкновенными дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными и могут быть проинтегрированы аналитически или численно

$$\int_0^{u_i(\tau)} \frac{du_i}{\varphi\,[u_1(\tau) + u_2(\tau) + \cdots + u_{i-1}(\tau) + u_i, w_i]} = \int_0^{u_i(\tau)} \frac{du_i}{\varphi\,[z_i + u_i, w_i]} = \tau \qquad \text{(V, 135)}$$

$$\Phi = [z_i, u_i(\tau), w_i] = \tau \qquad \text{(V, 136)}$$

$$z_i = u_1(\tau) + u_2(\tau) + \cdots + u_{i-1}(\tau) \qquad \text{(V, 137)}$$

Как и ранее, подынтегральная функция зависит от двух параметров — z_i и w_i — и интегрирование ее на ВМ не представляет сложности.

Разрешая (V, 136) относительно u_i, получаем:

$$u_i(\tau) = \Phi(z_i, w_i) \qquad \text{(V, 138)}$$

Исходная задача сводится к следующей задаче математического программирования:

найти $w_1, w_2, \ldots, w_n$, обеспечивающие максимум выражения

$$I = \sum_{i=1}^{n} u_i(\tau) \qquad \text{(V, 139)}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0$$
$$u_i(\tau) = \Phi(z_i, w_i) \qquad (V, 140)$$
$$z_1 = 0$$
$$z_i = u_1(\tau) + u_2(\tau) + \cdots + u_{i-1}(\tau) \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

Эта задача может быть решена методом динамического программирования. При этом функциональные уравнения имеют вид:

$$R_1(w_0) = \max_{w_0} u_1 = \Phi(0, w_0)$$
$$R_2(w_0) = \max_{w_2} \{\Phi[R_1(w_0 - w_2), w_2] + R_1(w_0 - w_2)\} \qquad (V, 141)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_n(w_0) = \max_{w_n} \{\Phi[R_{n-1}(w_0 - w_n), w_n] + R_{n-1}(w_0 - w_n)\}$$

Таким образом, при распределении нагрузок между реакторами с быстро падающей активностью катализатора необходимо различать два случая: старение и отравление катализатора. *В случае* ***старения*** *нагрузки следует распределять пропорционально константе скорости реакции; в случае* ***отравления*** *— для решения задачи распределения следует пользоваться методами вариационного исчисления или динамического программирования.*

ГЛАВА VI

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗОК

В предыдущих разделах рассматривались задачи распределения нагрузок в статике.

В действительности аппараты химической технологии представляют собой инерционные динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями.[98] Посмотрим, как влияют динамические свойства аппаратов на распределение нагрузок.

Определим оптимальное распределение нагрузок между двумя аппаратами, описываемыми дифференциальными уравнениями первого порядка

$$T_1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = \varphi_1(x_1)$$
$$T_2 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = \varphi_2(x_2) \qquad (VI, 1)$$

где y_1, y_2 — производительность аппаратов; x_1, x_2 — входные нагрузки; T_1, T_2 — постоянные времени первого и второго аппаратов; $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$ — статические характеристики первого и второго аппаратов.

Необходимо найти такое распределение нагрузок x_1, x_2, которое обеспечит максимальную производительность аппаратов за время τ

$$\max \int_0^\tau (y_1 + y_2)\,dt \qquad (VI, 2)$$

при условии

$$x_1 + x_2 = x_0(t) \qquad (VI, 3)$$

Для решения задачи распределения воспользуемся классическим аппаратом вариационного исчисления. Будем решать задачу (VI,1)—(VI, 3) как вариационную задачу на условный экстремум с незакрепленными правыми концами[96].

Найдем y_1, y_2, x_1, обеспечивающие максимум функционала:

$$\max \int_0^\tau \Phi(y_1, y_2, x_1, \gamma_1, \gamma_2) = \max \int_0^\tau \left\{ y_1 + y_2 - \gamma_1(t)\left[T_1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 - \varphi_1(x_1)\right] - \right.$$
$$\left. - \gamma_2(t)\left[T_2 \frac{dy}{dt} + y_2 - \varphi_2(x_0 - x_1)\right]\right\} dt \qquad (VI, 4)$$

где $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ — множители Лагранжа.

Для определения функций y_1, y_2, x решим систему дифференциальных уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1'}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2'}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1'}\right) = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{VI}, 5)$$

Подставляя в (VI, 5) подынтегральное выражение (VI, 4) и производя дифференцирование, получаем:

$$\begin{cases} T_1\gamma_1' - \gamma_1 = -1 \\ T_2\gamma_2' - \gamma_2 = -1 \end{cases} \qquad (\mathrm{VI}, 6)$$

$$\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_1) = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x_0 - x_1) \qquad (\mathrm{VI}, 7)$$

Краевые условия определяются из условия трансверсальности на незакрепленных правых концах

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y_1'}\right|_{t=\tau} = \gamma_1(\tau) = 0 \qquad (\mathrm{VI}, 8)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y_2'}\right|_{t=\tau} = \gamma_2(\tau) = 0$$

Решая систему дифференциальных уравнений (VI, 6) при краевых условиях (VI, 8), получаем:

$$\gamma_1 = 1 - e^{\frac{-(\tau-t)}{T_1}}$$
$$\gamma_2 = 1 - e^{\frac{-(\tau-t)}{T_2}} \qquad (\mathrm{VI}, 9)$$

Подставляя (VI, 9) в (VI, 7), получаем основное уравнение распределения нагрузок

$$\left(1 - e^{\frac{-(\tau-t)}{T_1}}\right) \frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1) = \left(1 - e^{\frac{-(\tau-t)}{T_2}}\right) \frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_0 - x_1) \qquad (\mathrm{VI}, 10)$$

Решая уравнение (VI, 10), определяем оптимальную нагрузку $x_1(t)$.

Сравним решение задачи (VI, 10) с оптимальным распределением нагрузок в установившемся режиме. В установившемся режиме все производные в уравнениях (VI, 1) обращаются в нуль и агрегаты описываются уравнениями статики

$$y_1 = \varphi_1(x_1)$$
$$y_2 = \varphi_2(x_2) \qquad (\mathrm{VI}, 11)$$

Оптимальное распределение нагрузок при этом, как было показано выше в гл. III, определяется путем решения уравнения

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1) = \frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_0 - x_1) \qquad \text{(VI, 12)}$$

Сравним уравнения (VI, 10) и (VI, 12). Пусть T_i^* — время переходного процесса в i-том агрегате. (Если считать, что переходный процесс оканчивается тогда, когда отклонение от установившегося состояния не превышает 2%, то $T_i^* \approx 4T_i$.)

При $0 \leqslant t \leqslant \tau - T_i^*$ множители при $d\varphi_i/dx_i$ в выражении (VI, 10) мало отличаются от единицы. Пренебрегая этими множителями, приходим к выводу, что в области

$$0 \leqslant t \leqslant \tau - T_{max}^* \qquad \text{(VI, 13)}$$

(T_{max}^* — наибольшее время переходного процесса) распределение нагрузок может осуществляться так же, как и в статическом режиме, без учета динамических свойств агрегатов. В области

$$\tau - T_{max}^* \leqslant t \leqslant \tau \qquad \text{(VI, 14)}$$

динамические свойства агрегата влияют на оптимальное распределение.

Так, если статические характеристики агрегатов одинаковы

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2) \qquad \text{(VI, 15)}$$

то в статическом режиме нагрузки должны быть распределены между агрегатами поровну

$$x_1 = x_2 \qquad \text{(VI, 16)}$$

В области (VI, 14), как легко показать из уравнения (VI, 10), нагрузка должна быть больше у того агрегата, который имеет меньшую постоянную времени (у менее инерционного агрегата).

Действительно

$$\frac{\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1)}{\frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_2)} = \frac{1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_2}}}{1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_1}}} \qquad \text{(VI, 17)}$$

Если $T_1 > T_2$, то

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1) > \frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_2) \qquad \text{(VI, 18)}$$

В силу того что $\frac{d\varphi_i}{dx_i}(x_i)$ — убывающие функции, из (VI, 18) следует

$$x_1 < x_2 \qquad \text{(VI, 19)}$$

Если статические характеристики агрегатов различны, то в области (VI, 14) нагрузка менее инерционного агрегата воз-

растает от величины $x_{icт}$, определяемой из уравнения (VI, 12), до величины $x_i(\tau)$, определяемой из уравнения

$$\frac{1}{T_1}\cdot\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1)=\frac{1}{T_2}\cdot\frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_0-x_1) \qquad \text{(VI, 20)}$$

Необходимо отметить, что в случае решения задачи распределения на минимум [и, соответственно, при вогнутых функциях $\varphi_i(x_i)$] в области (VI, 14) нагрузки должны распределяться так, чтобы большая нагрузка была у агрегата, имеющего большую постоянную времени.

В том случае, когда динамические свойства агрегатов одинаковы $T_1 = T_2$, множители при $d\varphi_i/dx_i$ в уравнении (VI, 10) сокращаются. Следовательно, при одинаковых постоянных времени агрегатов распределение нагрузок между ними осуществляется так же, как и в статическом режиме, согласно уравнениям (VI, 12).

Рассмотрим пример распределения нагрузок между двумя агрегатами, описываемыми уравнениями

$$0{,}1\,\frac{dy_1}{dt}+y_1=7-3\,(x_1-1)^2$$

$$0{,}2\,\frac{dy_2}{dt}+y_2=11-2\,(x_2-2)^2$$

Время интегрирования $\tau = 1$; общая нагрузка

$$x_0=x_1+x_2=1$$

В установившемся режиме оптимальное распределение нагрузок определяем из уравнения (VI, 12)

$$x_{1\,ст}=0{,}2 \qquad x_{2\,ст}=0{,}8$$

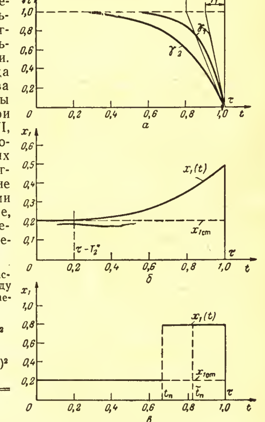


Рис. 53. Распределение нагрузок с учетом динамических свойств аппаратов:

а — изменение множителей Лагранжа γ_i; *б* — изменение нагрузки аппарата, имеющего выпуклую характеристику; *в* — изменение нагрузки аппарата, имеющего линейную характеристику.

На рис. 53, *а* показано изменение неопределенных множителей Лагранжа γ_i с течением времени. На рис. 53, *б* приведена кривая изменения оптимального распределения нагрузок. Как видно из рис. 53, *б* при $t<\tau-T_2^*$ оптимальная нагрузка $x_1(t)$ отклоняется от оптимальной нагрузки в статическом

режнме не более чем на 2%; прн $\tau > t > \tau - T_2^*$ нагрузка $x_1(t)$ растет и прн $t = \tau$ становнтся равной 0,5.

Если уравнение (VI. 10) ие имеет решений в области $0 \leqslant t < \tau$ классический метод вариационного исчислеиия ие дает решения задачи распределеиия. В этом случае для решеиия задачи (VI. 2—VI. 3) воспользуемся прииципом максимума для закрепленного времени[27,99].

Для решения задачи распределеиия необходимо иайти иагрузку x_1, обеспечивающую максимум функции

$$H = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 \qquad \text{(VI, 21)}$$

где

$$f_0 = -(y_1 + y_2)$$

$$f_1 = \frac{dy_1}{dt} = \frac{\varphi_1(x_1) - y_1}{T_1} \qquad \text{(VI, 22)}$$

$$f_2 = \frac{dy_2}{dt} = \frac{\varphi_2(x_2) - y_2}{T_2}$$

Вспомогательные перемеиные ψ_0, ψ_1, ψ_2 определяют из системы уравиеиий

$$\begin{cases} \psi_0' = 0 \\ \psi_1' = \dfrac{\partial f_0}{\partial y_1}\psi_0 - \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\psi_1 - \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}\psi_2 \\ \psi_2' = -\dfrac{\partial f_0}{\partial y_2}\psi_0 - \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}\psi_1 - \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}\psi_2 \\ \psi_0(\tau) = -1 \quad \psi_1(\tau) = 0 \quad \psi_2(\tau) = 0 \end{cases} \qquad \text{(VI, 23)}$$

Подставляя (VI, 22) в (VI, 23), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \psi_0' = 0 \\ \psi_1' = \psi_0 + \dfrac{1}{T_1}\psi_1 \\ \psi_2' = \psi_0 + \dfrac{1}{T_2}\psi_2 \\ \psi_0(\tau) = -1 \quad \psi_1(\tau) = 0 \quad \psi_2(\tau) = 0 \end{cases} \qquad \text{(VI, 24)}$$

Решение этой системы:

$$\psi_0(t) = -1$$

$$\psi_1(t) = T_1\left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_1}}\right) \qquad \text{(VI, 25)}$$

$$\psi_2(t) = T_2\left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_2}}\right)$$

$$0 \leqslant t \leqslant \tau$$

Подставляя (VI, 22) и (VI, 25) в (VI, 21), получаем:

$$H = -(y_1 + y_2) + T_1\left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_1}}\right)\left(\frac{\varphi_1(x_1) - y_1}{T_1}\right) + \\ + T_2\left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_2}}\right)\left(\frac{\varphi_2(x_2) - y_2}{T_2}\right) \quad \text{(VI, 26)}$$

Необходимо определить x_1, обеспечивающее максимум функции H. Отбрасывая в уравнении (VI, 26) члены, не зависящие от x_1, получаем

$$\max H^* = \max_{x_1}\left[\left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_1}}\right)\varphi_1(x_1) + \left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_2}}\right)\varphi_2(x_0 - x_1)\right] \quad \text{(VI, 27)}$$

В том случае, когда функция (VI, 27) выпуклая, экстремум находится в стационарной точке функции H^*, определяемой из уравнения

$$\frac{\partial H^*}{\partial x_1} = \left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_1}}\right)\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1) - \left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_2}}\right)\frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_0 - x_1) = \\ = \gamma_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1) - \gamma_2 \frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_0 - x_1) = 0 \quad \text{(VI, 28)}$$

Как и следовало ожидать, выражение (VI, 28) полностью совпадает с выражением (VI, 10).

Предположим, что агрегаты имеют линейные характеристики

$$\varphi_1(x_1) = \alpha_1 + \beta_1 x_1 \\ \varphi_2(x_2) = \alpha_2 + \beta_2 x_2 \quad \text{(VI, 29)}$$

Тогда, как известно, в статическом режиме распределение нагрузок между агрегатами определяется наклоном характеристик β_1 и β_2.

Если

$$\beta_1 > \beta_2 \quad \text{(VI, 30)}$$

первый агрегат получает наибольшую возможную нагрузку

$$x_1 = x_{1\,max}$$

а второй — остаток нагрузки

$$x_2 = x_0 - x_{1\,max}$$

В интервале времени

$$0 \leqslant t < \tau - T^*_{max}$$

множители γ_i, как было показано выше, мало отличаются от единицы и не влияют на распределение нагрузок.

В интервале времени

$$\tau - T^*_{max} \leqslant t < \tau$$

множители γ_i изменяются от 1 до 0.

Если $T_1 = T_2$, ранжировка величин $\gamma_1\beta_1$ и $\gamma_2\beta_2$ не изменяется, т. е. если $\beta_1 > \beta_2$, то

$$\gamma_1\beta_1 > \gamma_2\beta_2 \qquad (VI, 31)$$

Если же постоянные времени агрегатов различны, $T_1 > T_2$, то может наступить момент, когда неравенство (VI, 31) изменит знак на противоположный

$$\gamma_1\beta_1 < \gamma_2\beta_2$$

Тогда должно произойти переключение нагрузок: второй агрегат получает максимальную возможную нагрузку, а первый — остаток нагрузки

$$x_2 = x_{2\,max}$$

$$x_1 = x_0 - x_{2\,max}$$

Момент переключения $t_п$ определяется из решения уравнения

$$\gamma_1(t_п)\beta_1 = \gamma_2(t_п)\beta_2 \qquad (VI, 32)$$

Разлагая γ_i в ряд и ограничиваясь линейными членами, получаем следующее выражение для γ_i:

$$\gamma_i = \begin{cases} \dfrac{\tau - t}{T_i} & \text{при} \quad t > \tau - T_i \\ 1 & \text{при} \quad t \leqslant \tau - T_i \end{cases} \qquad (VI, 33)$$

Следовательно, момент переключения можно приближенно определить по формуле

$$t_п \approx \tau - \frac{\beta_2}{\beta_1} T_1 \qquad (VI, 34)$$

Если статические характеристики агрегатов представляют собой вогнутые функции, то, как известно из гл. III, в статическом режиме до своего верхнего предела нагружается агрегат, имеющий наибольшую производную производительности по нагрузке в области максимальных нагрузок

$$x_k = x_{k\,max},$$

если

$$\frac{d\varphi_k}{dx_k}(x_{k\,max}) = \max_i \frac{d\varphi_i}{dx_i}(x_{i\,max}) \qquad i = 1, 2 \qquad (VI, 35)$$

В динамическом режиме, если под влиянием множителей γ_i ранжировка $\gamma_i\left[\frac{d\varphi_i}{dx_i}(x_i)\right]$ изменяется, происходит переключение нагрузок, так же как и в случае линейных характеристик; если же ранжировка не изменяется, распределение нагрузок остается постоянным и равным распределению нагрузок в статическом режиме. Момент переключения определяется из уравнения

$$\gamma_1(t_п)\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_{1\,max}) = \gamma_2(t_п)\frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_{2\,max}) \qquad (VI, 36)$$

Пример. Требуется распределить нагрузку $x_0 = 1$ между двумя агрегатами, описываемыми уравнениями

$$0{,}1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = x_1 \qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}8$$

$$0{,}2 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = 1{,}2x_2 \qquad 0 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}8$$

так, чтобы производительность системы за время $\tau = 1$ принимала максимальное значение

$$\max \int_0^1 (y_1 + y_2)\, dt$$

В начальный период времени распределение определяется наклоном статических характеристик агрегатов $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 1{,}2$.

Второй агрегат имеет максимальную допустимую нагрузку $x_2 = 0{,}8$, первый агрегат имеет нагрузку $x_1 = 0{,}2$ (см. рис. 53, *в*).

В момент времени $t_п$ происходит переключение нагрузок; первый агрегат принимает нагрузку $x_1 = 0{,}8$, второй — $x_2 = 0{,}2$. Время $t_п$ определяется из уравнения (VI, 32):

$$\left[1 - e^{\frac{-(1-t_п)}{0{,}1}}\right] = \left[1 - e^{\frac{-(1-t_п)}{0{,}2}}\right] 1{,}2$$

$$t_п = 0{,}67$$

Приближенное значение $\tilde{t}_п$ по формуле (VI, 34)

$$\tilde{t}_п = 0{,}833$$

Обобщим полученные результаты на случай n агрегатов, описываемых дифференциальными уравнениями m-го порядка[99]. Пусть агрегаты описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами

$$\frac{d^m y_i}{dt^m} + a_{1i}(t) \frac{d^{m-1} y_i}{dt^{m-1}} + \ldots + a_{mi}(t)\, y_i = \varphi_i(x_i, t) \qquad \text{(VI, 37)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Общая нагрузка

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{(VI, 38)}$$

Нагрузки x_i ограничены

$$x_{i\,\min} \leqslant x_i \leqslant x_{i\,\max} \qquad \text{(VI, 39)}$$

Необходимо найти такое распределение нагрузок $x_i(t)$, которое обеспечивает максимум общей производительности системы, т. е. максимум функционала

$$I = \int_0^{\tau} \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\, dt \qquad \text{(VI, 40)}$$

Для решения задачи воспользуемся принципом максимума для неавтономных систем и закрепленного времени[27]. Преобразуем систему уравнений (VI, 37) в уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{i,\,j-1}}{dt} = y_{ij} \\ y_{i0} = y_i \\ \dfrac{dy_{i,\,m-1}}{dt} = \varphi_i(x_i,\,t) - a_{1i}y_{i,\,m-1} - a_{2i}y_{i,\,m-2} - \ldots - a_{mi}y_{i0} \\ \qquad i = 1,\,2,\,\ldots,\,n \qquad j = 1,\,2,\,\ldots,\,m-1 \end{cases} \qquad \text{(VI, 41)}$$

Необходимо найти нагрузки $x_i(t)$, обеспечивающие максимум выражения

$$H = -\psi_0 \sum_{i=1}^{n} y_{i0} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m-1} \psi_{i,\,j-1} y_{ij} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \psi_{i,\,m-1} [\varphi_i(x_i,\,t) - a_{1i}y_{i,\,m-1} - a_{2i}y_{i,\,m-2} - \ldots - a_{mi}y_{i,\,0}] \qquad \text{(VI, 42)}$$

Отбрасывая в (VI, 42) члены, не зависящие от $x_i(t)$, получаем, что для обеспечения максимума выражения (VI, 42) необходимо, чтобы следующее выражение для H^* принимало максимальное значение

$$H^* = \sum_{i=1}^{n} \psi_{i,\,m-1} \varphi_i(x_i,\,t)$$

Обозначим $\psi_{i,\,m-1} = \gamma_i$. Таким образом, задача распределения нагрузок сводится к следующей задаче математического программирования:

найти $x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)$, обеспечивающие максимум выражения

$$\max \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \varphi_i(x_i,\,t) \qquad \text{(VI, 43)}$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$$

$$x_{i\,\min} \leqslant x_i \leqslant x_{i\,\max}$$

Задача (VI, 43) отличается от задачи распределения нагрузок в статическом режиме, описанной в гл. III, только множителями γ_i, зависящими от динамических свойств агрегатов, и опре-

деляемыми из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_{ij}}{dt} = a_{m-j,\,i}(t)\,\gamma_i - \psi_{i,\,j-1} \\ \dfrac{d\gamma_i}{dt} = a_{1i}(t)\,\gamma_i - \psi_{i,\,m-2} \\ \dfrac{d\psi_{i,\,0}}{dt} = a_{mi}(t)\,\gamma_i - 1 \\ \psi_{i0}(\tau) = 1 \quad \psi_{ij}(\tau) = 1 \quad \gamma_i(\tau) = 1 \\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m-2 \end{cases} \tag{VI, 44}$$

Решая систему (VI, 44), получим

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} P_{ij}(t)\, e^{-\lambda_{ij}(t-\tau)} + \frac{1}{a_{mi}} \tag{VI, 45}$$

где c_{ij} — постоянная величина; λ_{ij} — корни характеристического уравнения для уравнения (VI, 37); $P_{ij}(t)$ — полином степени на единицу меньшей кратности корня λ_{ij}.

Множители γ_i не зависят от нагрузки агрегатов x_i, и потому вид функции $\gamma_i\varphi_i(x_i)$ (выпуклость или вогнутость) зависит только от вида статических характеристик агрегатов $\varphi_i(x_i)$.

В интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \tau - T^{*}_{\max}$ ($T^{*}_{\max}$ — время затухания переходного процесса самого инерционного агрегата) множители γ_i имеют значение

$$\gamma_i \approx \frac{1}{a_{mi}}$$

При этом распределение нагрузок определяется решением задачи

$$\max \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x_i)}{a_{mi}} \tag{VI, 46}$$

при условиях [(VI, 39)—(VI, 40)]. В том случае, когда a_{mi} и x_0 не зависят от времени, распределение нагрузок на этом интервале времени остается постоянным.

Что же касается интервала времени

$$\tau - T^{*}_{\max} < t < \tau$$

то в этой области возможны различные варианты распределения. Так, например, если функции $\gamma_i(d\varphi_i/dx_i)$ могут быть проранжированы так, чтобы порядок ранжировки сохранялся для всех x_i, удовлетворяющих ограничениям (VI, 39)

$$\gamma_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} \geqslant \gamma_2 \frac{d\varphi_2}{dx_2} \geqslant \ldots \geqslant \gamma_n \frac{d\varphi_n}{dx_n} \tag{VI, 47}$$

то в этом случае оптимальное распределение нагрузок определяется следующим образом:

$$x_1 = x_{1\,max} \qquad (VI, 48)$$
$$x_2 = x_{2\,max}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_{k-1} = x_{k-1\,max}$$
$$x_k = x_0 - \sum_{i=1}^{k-1} x_{i\,max} - \sum_{i=k+1}^{n} x_{i\,min}$$
$$x_{k+1} = x_{k+1\,min}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = x_{n\,min}$$

Необходимо отметить, что ранжировка (VI, 47) может быть всегда произведена для агрегатов, имеющих линейные характеристики. В тот момент, когда неравенства (VI, 47) нарушаются, происходит перераспределение нагрузок в соответствии с новой ранжировкой.

В случае выпуклых характеристик $\varphi_i(x_i, t)$ задача распределения (VI, 43) решается методом неопределенных множителей Лагранжа и оптимальные нагрузки находятся из системы уравнений

$$\gamma_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} = \gamma_2 \frac{d\varphi_2}{dx_2} = \ldots = \gamma_n \frac{d\varphi_n}{dx_n} \qquad (VI, 49)$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$$

Пример 1. Рассмотрим распределение нагрузки между двумя агрегатами, описываемыми уравнениями

$$0{,}1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = 5x_1$$
$$0{,}00246 \frac{d^2y_2}{dt^2} + 0{,}0123 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = 4x_2$$
$$0 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}8$$
$$0 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}8$$

Общая нагрузка $x_0 = 1$, время интегрирования $\tau = 1$.

На рис. 54, *а* показано изменение коэффициентов γ_1 и γ_2 с течением времени

$$\gamma_1 = 1 - e^{-10(\tau - t)}$$
$$\gamma_2 = 1 - e^{-2{,}5(\tau - t)} \cos 20 (\tau - t)$$

Уравнение

$$\beta_1 \gamma_1 (t) = \beta_2 \gamma_2 (t)$$

имеет четыре решения

$$t_1 = 0{,}49 \quad t_2 = 0{,}57 \quad t_3 = 0{,}77 \quad t_4 = 0{,}66$$

На рис. 54, *б* показано изменение нагрузки первого агрегата с течением времени. В точках t_1, t_2, t_3, t_4 происходит переключение нагрузок.

Пример 2. Рассмотрим распределение циркуляционного газа между четырьмя агрегатами синтеза аммиака [99].

Уравнение агрегата имеет вид

$$T_i \frac{dy_i}{dt} + y_i = x_i (a_i - b_i x_i)$$

где y_i — производительность агрегата по жидкому аммиаку; x_i — расход циркуляционного газа на один агрегат синтеза; T_i, a_i, b_i — постоянные коэффициенты

$$a_1 = 1{,}4 \quad a_2 = 1{,}15 \quad a_3 = a_4 = 0{,}78$$

$$b_1 = 0{,}9 \quad b_2 = 1{,}1 \quad b_3 = b_4 = 1$$

$$T_1 \leqslant T_2 \leqslant T_3 \leqslant T_4 < \tau$$

$$x_{i\,\min} = 0{,}1 \quad x_{i\,\max} = 0{,}26$$

Общая нагрузка изменяется с течением времени:

при

$$0 < t < 0{,}5\tau$$

$$x_0 = 1$$

при

$$0{,}5\tau < t \leqslant \tau$$

$$x_0 = 0{,}8$$

Легко показать, что при всех t

$$\gamma_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} \geqslant \gamma_2 \frac{d\varphi_2}{dx_2} \geqslant \gamma_3 \frac{d\varphi_3}{dx_3} \geqslant \gamma_4 \frac{d\varphi_4}{dx_4}$$

Поэтому оптимальное распределение определяется по закону (VI, 48):

при

$$0 \leqslant t \leqslant 0{,}5\tau$$

$$x_1 = 0{,}26 \quad x_2 = 0{,}26 \quad x_3 = 0{,}26 \quad x_4 = 0{,}22$$

при

$$0{,}5\tau < t < \tau$$

$$x_1 = 0{,}26 \quad x_2 = 0{,}26 \quad x_3 = 0{,}18 \quad x_4 = 0{,}1$$

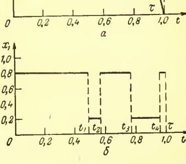


Рис. 54. Распределение нагрузок между аппаратами, описываемыми уравнениями 2-го порядка:
а—изменение коэффициентов γ; *б*—изменение нагрузки первого агрегата.

В результате оптимального распределения нагрузок производительность увеличилась на 3,5% по сравнению с равномерным распределением.

Таким образом, алгоритм оптимального распределения нагрузки между агрегатами с учетом динамических свойств агрегатов может быть сформулирован следующим образом:

Между агрегатами, имеющими ***одинаковые*** *динамические характеристики, распределение нагрузок осуществляется по тем же законам, что и в статическом режиме.*

Между агрегатами, имеющими ***различные*** *динамические характеристики, в области* $0 < t < \tau - T^*_{\max}$ *распределение нагрузок осуществляется по тем же законам, что и в статическом режиме.*

Между агрегатами, имеющими ***различные*** *динамические характеристики в интервале времени* $\tau - T^*_{\max} < t < \tau$ *оптимальное распределение определяется следующим образом:*

для агрегатов, имеющих ***выпуклые*** *статические характеристики, нагрузки непрерывно меняются по закону, определяемому уравнениями*

$$\gamma_1(t)\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1)=\gamma_2(t)\frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_2)=\ \dots\ =\gamma_n(t)\frac{d\varphi_n}{dx_n}(x_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=x_0 \qquad \text{(VI, 50)}$$

для одноемкостных объектов эти уравнения имеют вид:

$$\left(1-e^{\frac{-(\tau-t)}{T_1}}\right)\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1)=\left(1-e^{\frac{-(\tau-t)}{T_2}}\right)\frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_2)=\ \dots$$

$$\dots=\left(1-e^{\frac{-(\tau-t)}{T_n}}\right)\frac{d\varphi_n}{dx_n}(x_n) \qquad \text{(VI, 51)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=x_0$$

При этом нагрузка более инерционного агрегата должна убывать, а менее инерционного агрегата — расти.

Для агрегатов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями более высокого порядка, множители γ определяются из системы уравнений (VI, 44).

Для агрегатов, произведения наклонов статических характеристик которых на множитель γ_i для всех возможных нагрузок агрегатов x_i могут быть ***проранжированы*** *так, что*

$$\gamma_1\frac{d\varphi_1}{dx_1}\geqslant\gamma_2\frac{d\varphi_2}{dx_2}\geqslant\dots\geqslant\gamma_n\frac{d\varphi_n}{dx_n} \qquad \text{(VI, 52)}$$

нагрузки распределяются в соответствии с порядковым номером агрегатов в последовательности (VI, 52), *а именно: агрегаты, имеющие большую величину* $\gamma_i\frac{d\varphi_i}{dx_i}$, *получают максимальную возможную нагрузку, а агрегаты, имеющие меньшую величину* $\gamma_i\frac{d\varphi_i}{dx_i}$, *— минимальную возможную нагрузку*

$$x_1=x_{1\max}\quad x_2=x_{2\max}\ \cdots\ x_{k-1}=x_{k-1\max}$$

$$x_k=x_0-\sum_{j=1}^{k-1}x_{j\max}-\sum_{j=k+1}^{n}x_{j\min}$$

$$x_{k+1}=x_{k+1\min}\ \cdots\ x_n=x_{n\min}$$

Ранжировка (VI, 52) всегда может быть выполнена для агрегатов, имеющих линейные характеристики. При изменении ранжировки происходит переключение нагрузок.

Так, при линейных статических характеристиках агрегатов моменты переключения определяются из решений системы уравнений

$$\gamma_i \beta_i = \gamma_j \beta_j$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{VI, 53}$$

где β_i, β_j — наклоны линейных характеристик агрегатов.

Для случая одноемкостных агрегатов система уравнений (VI, 53) имеет вид:

$$\left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_i}}\right)\beta_i = \left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_j}}\right)\beta_j \tag{VI, 54}$$

Для агрегатов, имеющих характеристики ***произвольной*** *формы, нагрузки агрегатов изменяются по закону, определяемому путем решения задачи математического программирования*

$$\max \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \varphi_i(x_i) \tag{VI, 55}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$$

Для одноемкостных агрегатов оптимальное распределение определяется из решения задачи

$$\max \sum_{i=1}^{n} \left(1 - e^{\frac{-(\tau - t)}{T_i}}\right) \varphi_i(x_i) \tag{VI, 56}$$

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗОК

В главах III, IV и V были изложены основные принципы распределения нагрузок между параллельно работающими агрегатами химической промышленности. Характер распределения и выбор технических средств определяется рядом факторов, из которых главными являются вид характеристик агрегатов, наличие априорной информации о характеристиках, изменение характеристик с течением времени. В настоящей главе будут описаны различные технические средства и системы, применяемые для оптимального распределения нагрузок.

АГРЕГАТЫ С ОДИНАКОВЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В практически важных случаях принцип распределения нагрузки между одинаковыми агрегатами заключается либо в полной загрузке всех агрегатов, кроме одного (для случая линейных или вогнутых характеристик), либо в равномерном распределении нагрузок между всеми агрегатами.

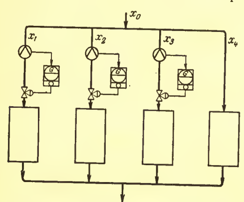


Рис. 55. Схема автоматического регулирования для распределения нагрузок между агрегатами с одинаковыми линейными или вогнутыми характеристиками.

В первом случае оптимальное распределение осуществляется с помощью обычных систем автоматического регулирования, стабилизирующих нагрузку всех агрегатов, кроме одного, произвольно выбранного, на максимально допустимом уровне. Один агрегат воспринимает все колебания нагрузки и не имеет системы стабилизации нагрузки (рис. 55 для $n = 4$). Во втором случае равно-

мерное распределение нагрузок иногда может обеспечиваться самопроизвольно (если гидравлическое сопротивление аппаратов одинаково).

Однако обычно гидравлическое сопротивление аппаратов бывает разным и поэтому равномерное распределение обеспечивается с помощью системы автоматических регуляторов, поддерживающих заданное соотношение между расходом сырья к агрегату и общим расходом сырья

$$\frac{x_i}{x_0} = \frac{1}{n} \qquad (VII, 1)$$

Необходимо отметить, что при одновременном закрытии регулирующих органов распределение нагрузок не изменяется, но

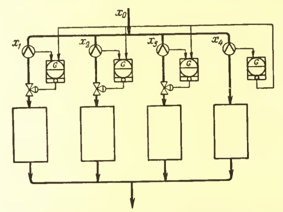


Рис. 56. Система регулироваиия для распределения нагрузок между агрегатами с одииаковыми выпуклыми характеристиками.

энергетические потери, вызванные перепадом давления на регулирующем органе, увеличиваются. Это показывает, что задача автоматического распределения в данной постановке статически неопределима для координат регулирующих органов. Поэтому рационально строить систему распределения таким образом, чтобы при заданном распределении расходов по крайней мере один из регулирующих органов был полностью открыт. При этом система регулирования состоит из $n-1$ регуляторов соотношения, поддерживающих равное соотношение расходов $(x_i/x_j) = 1$ (рис. 56 для $n = 4$). Регулирующий клапан агрегата, имеющего наибольшее гидравлическое сопротивление, полностью открыт. Эта схема обеспечивает большую точность регулирования, так как поддерживаемое соотношение расходов близко к единице.

Оптимальное распределение можно поддерживать также с помощью многоканального регулятора, описание которого будет приведено ниже.

АГРЕГАТЫ С РАЗНЫМИ, ПОЛНОСТЬЮ ИЗВЕСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Системы управления агрегатами с разными характеристиками состоят из вычислительного устройства ВУ, в котором производится расчет оптимальных нагрузок, и системы регуляторов или многоканального регулятора, реализующего заданное распределение нагрузок на объекте (рис. 57). До настоящего времени системы распределения чаще выполняются в виде системы-советчика. При этом выходом системы являются показания приборов на пульте вычислительного устройства. Вид и функции вычислительного устройства зависят от вида характеристик агрегатов и, следовательно, принятого алгоритма оптимального распределения.

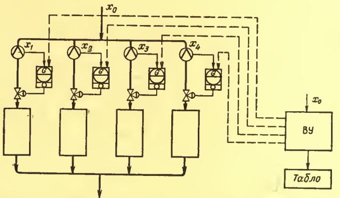


Рис. 57. Схема регулирования для распределения нагрузок между четырьмя агрегатами с разными характеристиками:
——— от вычислительного устройства.

Значение суммарной нагрузки x_0 вводится в устройство либо автоматически непрерывно, либо периодически оператором. В зависимости от вида характеристик агрегатов в вычислительном устройстве могут применяться различные алгоритмы оптимального распределения, основанные на динамическом программировании, методе неопределенных множителей Лагранжа или градиентном методе. В первом случае вычислительное устройство должно представлять собой цифровую вычислительную машину (ЦВМ), во втором и третьем случаях могут быть применены ЦВМ или специализированные аналоговые машины АВМ. Остановимся подробнее на возможностях технической реализации оптимального распределения в зависимости от вида характеристик агрегатов.

Для агрегатов, имеющих линейные или вогнутые характеристики, оптимальное распределение заключается в максимальной загрузке всех агрегатов, кроме одного, имеющего наиболь-

ший наклон характеристики. Это распределение реализуется с помощью системы автоматического регулирования, изображенной на рис. 55.

Для агрегатов, имеющих выпуклые характеристики, при оптимальном распределении должны быть равны производные производительности по нагрузке (или производные затрат по выходной нагрузке).

Как было показано в главах IV, V, агрегаты с выпуклыми характеристиками весьма широко распространены в химической промышленности. В энергетике выпуклый тип характеристик также является наиболее распространенным[7]. Поэтому подавляющее большинство разработанных в настоящее время специализированных вычислительных устройств предназначено для распределения нагрузок между агрегатами с выпуклыми характеристиками. В основу алгоритма этих устройств положен метод неопределенных множителей Лагранжа. Большинство устройств распределения нагрузок работает как система-советчик в энергетике. Поскольку эти устройства могут без существенных изменений применяться и в химической промышленности, остановимся подробнее на описании конструкции отдельных вычислительных устройств.

К числу первых устройств для распределения нагрузок относится устройство РАН, разработанное в ЭНИМ АН СССР (1947—49 г.), «Early Bird» фирмы «Лидс и Нортруп» (1953 г.)[100], устройство фирмы «Вестингауз» (1956)[101] и устройство «Sielomat» фирмы «Сименс» (1959 г.)[102].

В первых вычислительных устройствах в качестве моделей характеристик агрегатов использовались механические или электромеханические устройства. Например, в устройстве РАН функциональные блоки, моделирующие характеристики агрегатов, имели сложное переключающее устройство и потенциометр с механическим перемещением движков; в некоторых устройствах использовались механические шаблоны для моделирования зависимости производной характеристики агрегата от нагрузки *.

В Киевском институте автоматики, начиная с 1959 г., разрабатывается серия вычислительных устройств типа «Экран»[103, 104]. Действие их основано на моделировании уравнения распределения нагрузок на основании закона Кирхгофа (см. гл. III). Устройства предназначены для распределения нагрузок в различных энергосистемах. Так, «Экран-2» предназначен для распределения нагрузок между теплоэлектростанциями (ТЭС) Киевэнерго, «Экран-3» и «Экран-4» — для распределения нагрузок в энергетических системах Украины, Урала и Башкирии, «Экран-5» — для распределения нагрузок между агрегатами электростанций. На рис. 58 изображена блок-схема «Экран-2».

* В энергетике зависимость производной затрат в агрегате от нагрузки носит название характеристики относительных приростов.

Устройство состоит из станционных блоков СБ, линейных элементов ЛЭ и нагрузочного элемента НЭ.

Линейные элементы предназначены для учета потерь в сетях; нагрузочный элемент, имитирующий суммарную нагрузку ΣP системы, представлен источником питания ИП. В процессе эксплуатации значение суммарной нагрузки устанавливается вручную. Три измерительных прибора указывают наивыгоднейшие нагрузки станций P_1, P_2 и P_3.

Устройство «Экран-7»[105] предназначено для распределения нагрузок в энергосистеме, состоящей из теплоэлектростанций и гидроэлектростанций. Устройство собрано на полупроводниковых приборах с применением печатных схем. Характеристики относительных приростов вводятся легко настраиваемыми сменными кассетами.

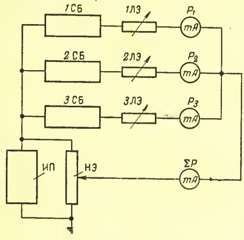


Рис. 58. Блок-схема „Экран — 2".

Задача распределения нагрузок в энергосистеме осложняется тем, что расстояния между электростанциями и потребителями могут быть значительными и поэтому необходимо учитывать потери электроэнергии в электрических линиях.

В качестве примера рассмотрим систему экономичного распределения нагрузок между четырьмя электростанциями.

На рис. 59 изображена энергетическая система, состоящая из трех теплоэлектростанций: ТЭЦ-1, ТЭЦ-2, ТЭЦ-3, и одной гидростанции ГРЭС-4. Расстояние между теплоэлектростанциями и гидростанцией составляет 173 *км*. Система обеспечивает электроэнергией два района P_I и P_{II}.

На рис. 60 изображена структурная схема используемого счетно-решающего устройства. Действие устройства основано на принципе равенства относительных приростов ТЭЦ

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_0$$

Относительный прирост ГРЭС корректируется с учетом потерь в линии

$$b_4 = b_0 k(P_л) = \frac{b_0}{1 - \frac{d\pi}{dP_л}(P_л)}$$

$$P_л = P_4 - P_I$$

где π — потери в линии, зависящие от нагрузки линии $P_л$; k — коэффициент, учитывающий потери в линии.

Общая нагрузка электростанций равна сумме нагрузки потребителей и потерь в линии

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P_I + P_{II} + \pi$$

Задаваясь нагрузкой P_I, изменяют величину b_0 до тех пор, пока суммарная нагрузка P_0 не будет равна заданной. В схеме ис-

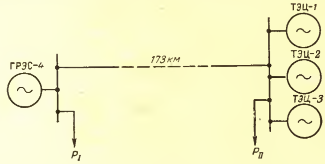


Рис. 59. Схема энергетической системы.

пользуются нелинейные блоки НБ-1, НБ-2, НБ-3, НБ-4 для моделирования характеристик относительных приростов $P_i(b_i)$, блок НБ-5 и блок перемножения БП для учета потерь в сети, сумматоры Σ_1 (для определения нагрузки сети) и Σ_2 (для определения суммы мощностей).

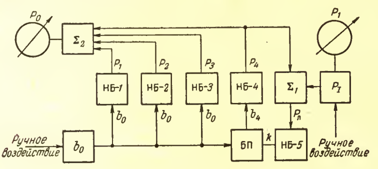


Рис. 60. Структурная схема вычислительного устройства.

В ряде устройств для распределения нагрузок используют принцип аналогового моделирования системы дифференциальных уравнений, установившееся решение которой является решением задачи оптимального распределения (см. гл. III).

Примером таких устройств могут служить вычислительная машина для распределения нагрузок между агрегатами разработки Тбилисского научно-исследовательского института систем

автоматики (ТНИИСА)[107, 108], вычислительные устройства типа АНРАН[109, 110], разработанные Ленинградским политехническим институтом, и ряд других устройств[106].

Иногда для распределения нагрузок применяются серийные аналоговые[111] и цифровые[112, 113] вычислительные машины. Подробное описание ряда аналоговых и цифровых устройств для оптимального распределения содержится в работах[70, 114, 115].

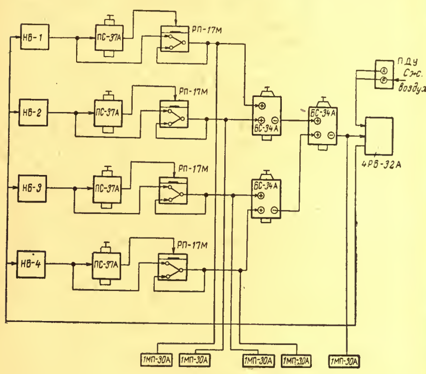


Рис. 61. Пневматический оптимизатор.

В работе[116] описывается пневматический оптимизатор распределения нагрузок, предназначенный специально для работы в условиях химической промышленности. Действие устройства основано на принципе равенства производных затрат по нагрузке. Структурная схема оптимизатора аналогична описанным ранее структурам устройств для оптимального распределения нагрузок в энергетике. Однако в отличие от этих устройств описываемый оптимизатор выполнен на пневматических блоках АУС, что позволяет широко применять оптимизатор на взрывоопасных предприятиях химической промышленности.

На рис. 61 изображена принципиальная схема пневматического вычислительного устройства, предназначенного для рас-

пределения нагрузок между четырьмя агрегатами. В системе использованы нелинейные пневматические блоки НБ [117]. Ограничения по нагрузке вводятся с помощью блоков ПС-37А и РП-17М. Суммирование осуществляется с помощью блоков БС-34А, а блоком обратной связи служит блок 4РБ-32А. Для изменения заданной нагрузки применяется панель дистанционного управления ПДУ.

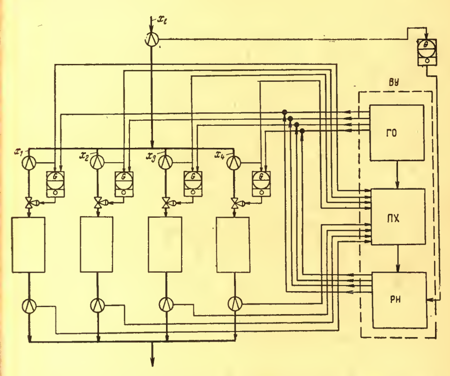


Рис. 62. Схема регулирования для распределения нагрузки между агрегатами с неизвестными характеристиками.

Когда нагрузка какого-либо агрегата достигает своего верхнего предела, срабатывает реле сигнализации ПС-37А. По его сигналу реле РП-17М производит переключение, в результате которого нагрузка соответствующего агрегата становится постоянной, равной его максимальному значению. Значения производительности каждого агрегата и всей установки в целом можно наблюдать на вторичных показывающих приборах 1МП-30А.

Перечисленные устройства обычно используются как системы-советчики, вырабатывающие рекомендации, которые в дальнейшем реализуются человеком. Возможно, однако, связать выход вычислительных устройств с уставками регуляторов

стабилизации нагрузок управляемых агрегатов[118]. Соответствующая система автоматического регулирования показана на рис. 57 (пунктир).

АГРЕГАТЫ С РАЗНЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В этом случае система оптимального распределения должна автоматически определять характеристики агрегатов. На рис. 62 приведена блок-схема такой системы. В начальном периоде работы по заданной программе генератор отклонений ГО осуществляет изменение нагрузок агрегатов. Затем измеряют соответствующие этим нагрузкам затраты или количество получаемой продукции. По результатам измерений производят построение характеристик ПХ. На основании полученных характеристик осуществляется распределение нагрузок РН. Эта система практически трудно осуществима, так как требует изменения нагрузок агрегатов в процессе работы от минимальных до максимально допустимых. Для ее технической реализации необходима цифровая вычислительная машина.

Более перспективны системы, в которых характеристики определяют по косвенному параметру, пропорциональному производной затрат по нагрузке (или функции от косвенных параметров). Так, например, в энергетической промышленности для непрерывного расчета характеристик относительных приростов паровых котлов было разработано специализированное вычислительное устройство непрерывного действия ИПК (измеритель приростов котла)[119].

В основу построения устройства было положено выражение

$$b = \alpha + \frac{dB_{п}}{dD} \qquad \text{(VII, 2)}$$

где b — относительный прирост; $B_{п}$ — потери условного топлива, *т/ч*; D — нагрузка котла, *т* пара/*ч*.

Потери топлива $B_{п}$ зависят от многих факторов, в том числе от состава топлива, температуры холодного воздуха и уходящих газов, состава уходящих газов, теплоизлучения котла, затрат тепла на собственные нужды и т. д. Анализ зависимостей $B_{п}$ от перечисленных факторов показал, что влиянием некоторых факторов можно пренебречь, другие можно считать постоянными, третьи — пропорциональными нагрузке агрегата D. В результате с точностью, достаточной для практических целей, относительный прирост котла можно рассчитывать по формуле

$$b = a_0\left(\frac{1}{\eta} - a_1 D + a_2 D^2\right) \qquad \text{(VII, 3)}$$

где η — к. п. д. котла, %.

$$\eta = 100 - q_2 - q_3 - q_4 - q_5 - q_6$$

$$q_2 = a_3 t_{\text{ух}} + \frac{a_4 + t_{\text{ух}} - a_5 t_{\text{хв}}}{R}$$

$$q_4 = a_6 D^2 + a_7 D + a_8$$

$$q_3,\ q_5,\ q_6 = \text{const}$$

где $t_{\text{ух}}$, $t_{\text{хв}}$ — температура уходящих газов и холодиого воздуха; R — содержаиие кислорода в уходящих газах; q_2, q_3, q_4, q_5, q_8 — различиые виды потерь; a_0, a_1 ..., a_8 — постояииые коэффициеиты, рассчитываемые по даииым предварительиых испытаиий котлов, по составу топлива и т. д.

На рис. 63 приведена упрощенная схема системы с вычислительным устройством, реализующим формулу (VII, 3). Каждый котел снабжен измерительными устройствами для определения

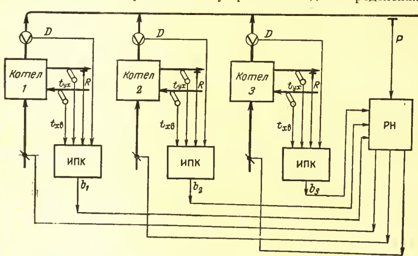


Рис. 63. Схема распределеиия иагрузок при помощи устройства ИПК.

D, $t_{\text{хв}}$, $t_{\text{ух}}$, R. Значения b_i, рассчитанные в блоках ИПК для каждого котла, поступают в автоматическое устройство распределения нагрузки между котлами РН, где сравниваются. Действие РН основано на принципе равенства относительных приростов. На устройство РН подается сигнал от датчиков давления паровой магистрали. В свою очередь, РН воздействует на регуляторы подачи топлива в котлы.

АГРЕГАТЫ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПАРАМЕТРА

В главах IV и V был описан ряд агрегатов (теплообменные аппараты, массообменные аппараты, химические реакторы), имеющих выпуклые характеристики, зависящие от параметра

(коэффициента теплопередачи, коэффициента массопередачи, константы скорости реакции). Было показано, что в ряде случаев оптимальное распределение должно осуществляться пропорционально этим параметрам. Этот вывод позволяет построить более простую систему управления распределением нагрузок.

В том случае, когда эти параметры для каждого агрегата известны заранее и не изменяются с течением времени, система распределения нагрузок имеет тот же вид, что схема, изображенная на рис. 56. Система состоит из $n-1$ регуляторов соотношения, поддерживающих заданные соотношения между расходом сырья к агрегату j, для которого параметр K_j имеет максимальное значение, и расходами сырья к остальным агрегатам.

$$K_j = \max K_i \qquad \text{(VII, 4)}$$

$$\frac{x_i}{x_j} = \frac{K_i}{K_j} \qquad \text{(VII, 5)}$$

Регулирующий клапан на входе сырья в j-тый агрегат полностью открыт. Положение регулирующих клапанов в остальных агрегатах определяется регуляторами соотношения по закону (VII. 5).

В том случае, когда величины K_i заранее не известны, их надо определить экспериментально.

Определение коэффициентов K_i на основе математического описания известного вида может осуществляться по данным нормальной эксплуатации с помощью цифровой вычислительной машины или аналогового специализированного устройства (см. гл. VIII).

Выбор максимального K_j также может осуществляться цифровой вычислительной машиной или специализированным устройством. В точке, соответствующей оптимальному распределению, можно произвести повторное измерение параметров технологического режима и расчет параметров K_j, позволяющий уточнить оптимальное распределение нагрузок.

В отличие от системы автоматического определения характеристик агрегатов, описанной выше, в этой системе не надо снимать показания приборов во всем диапазоне изменения нагрузок и поэтому нет необходимости в пробных изменениях нагрузки агрегатов. Эта система не усложняется при увеличении числа параллельно работающих агрегатов. Ее техническая реализация определяется сложностью алгоритма расчета параметра K_i.

Во всех описанных выше системах распределения нагрузок в качестве выходного устройства применяются автоматические регуляторы, число которых определяется числом параллельно работающих агрегатов. В том случае, когда число агрегатов достаточно велико (больше 4—5), вместо группы регуляторов целесообразно использовать многоканальные регулирующие устройства.

Пневматический многоканальный регулятор типа РИТМ, предназначенный для автоматического распределения потоков (разработка ЦНИИКА)[120], стабилизирует заданное распределение потоков, обеспечивая при этом минимизацию гидравлических сопротивлений в системе распределения потоков. Устройство РИТМ может быть использовано в системе распределения нагрузок любого из описанных выше типов.

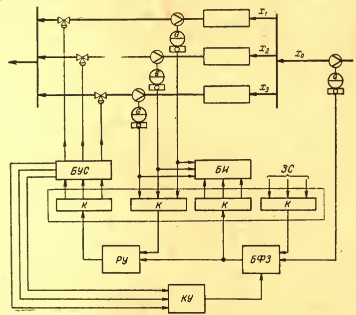


Рис. 64. Блок-схема „Ритм".

На рис. 64 изображена функциональная схема многоканального регулятора РИТМ. Устройство работает следующим образом: на коммутатор К поступают сигналы от датчиков, измеряющих нагрузку параллельных агрегатов. Эти сигналы поочередно подключаются ко входу регулирующего устройства РУ. На другой вход регулирующего устройства поступает задание от блока формирования задания БФЗ. Регулятор РУ вырабатывает регулирующее воздействие и посылает его через коммутатор и блок управления БУС на регулирующие органы, изменяющие расход в каждом канале до достижения заданного значения. Блок управления системой БУС осуществляет перевод с автоматического управления на ручное; с его помощью производится дистанционное управление, выполняются операции блокировки и другие вспомогательные функции. Блок информации БИ передает информацию о положении регулируемых параметров и о заданиях в системе (в виде эпюры распределений) на прибор — эпюроскоп.

Задание для каналов регулирования формируется в блоке формирования задания. Оно складывается из информации об общей нагрузке и заданного соотношения потоков ЗС. Для минимизации гидравлических сопротивлений задания корректируют по положению исполнительных механизмов. Корректирующее устройство КУ содержит блок выбора максимума, определяющий сигнал наиболее открытого исполнительного механизма. Этот сигнал сравнивается с уставкой на полное открытие, и, в соответствии с разностью сигналов, БФЗ изменяет задания таким образом, чтобы один из регулирующих органов полностью открывался.

В различных модификациях регулятора число каналов регулирования может изменяться от 6 до 24, а длительность цикла обегания от 4 до 16 *мин.*

Мы рассмотрели ряд схем и устройств для распределения нагрузок между параллельными агрегатами. Однако для распределения нагрузок между многими агрегатами химической промышленности может быть использована система автоматического регулирования, существенно более простая, чем все описанные ранее.

Как было показано в гл. IV, V, при оптимальном распределении нагрузок между многими агрегатами химической промышленности (теплообменниками, абсорбционными аппаратами, реакторами) должно соблюдаться равенство некоторых определяющих параметров для всех параллельно работающих агрегатов.

Так, при оптимальном распределении нагрузок между теплообменниками должны быть равны между собой температуры продукта на выходе из теплообменников; при оптимальном распределении нагрузок между абсорберами должны быть равны между собой концентрации отделяемого компонента на выходе из абсорбера; при оптимальном распределении нагрузок между реакторами должны быть равны между собой выходы целевого продукта или некоторая функция концентраций продуктов на выходе из реактора. Этот факт может быть использован при создании системы оптимального распределения нагрузок [121, 122].

На рис. 65 показана блок-схема системы автоматического регулирования. Входная нагрузка каждого из агрегатов стабилизируется с помощью регулятора расхода P_i^{II}. Определяющий параметр A_i измеряется с помощью датчика (или рассчитывается в вычислительном устройстве по показаниям датчиков) и вводится в блок усреднения БУС (сумматор).

Блок усреднения определяет среднее значение параметра

$$A_{\text{ср}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}{n} \qquad \text{(VII, 6)}$$

Величина $A_{ср}$ служит заданием регулятору P_i^{I} параметра A_i, в свою очередь, воздействующему на регулятор расхода P_i^{II}.

Регуляторы P_i^{I} и P_i^{II} изменяют нагрузку агрегата до тех пор, пока определяющие параметры не становятся равными между собой

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n \qquad \text{(VII, 7)}$$

Однако подобная система не является статически однозначной, так как одно и то же распределение может осуществляться

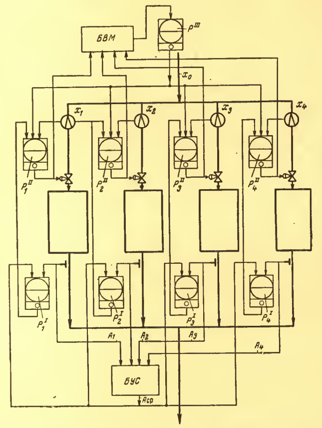


Рис. 65. Схема регулирования для распределения нагрузок между агрегатами по выходному параметру.

при разных степенях открытия регулирующих клапанов. Поэтому в систему введено устройство минимизации гидравлического сопротивления, обеспечивающее полное открытие одного из клапанов.

Принцип действия этого устройства заключается в следующем: сигналы, пропорциональные положению регулирующих

клапанов, поступают в блок выбора максимума БВМ. Наибольший сигнал сравнивается с сигналом полностью открытого клапана u_0 (для клапана типа ВО) в регуляторе P^{III}. Если $u_{i\,max} = u_0$, сигнал на выходе регулятора P^{III} равен нулю; если $u_{i max} < u_0$, на выходе регулятора P^{III} появляется сигнал, который одновременно открывает все клапаны до тех пор, пока по крайней мере один из них не окажется полностью открытым.

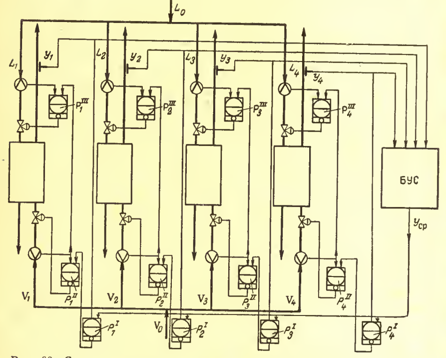


Рис. 66. Схема регулирования для распределения нагрузок двух потоков.

На рис. 66 показана упрощенная блок-схема системы, осуществляющей оптимальное распределение двух потоков (например, жидкости L_0 и газа V_0 в процессе абсорбции) между четырьмя агрегатами ($n = 4$). Расход газа V_i устанавливается с помощью описанной выше системы; роль параметра A_i играет концентрация абсорбируемого компонента в газе на выходе из аппарата. На схеме не показано устройство, минимизирующее гидравлические сопротивления. Расход раствора L_i устанавливается регуляторами cóотношения P_i^{III}, поддерживающими равное соотношение газовой и жидкостной нагрузок

$$\frac{L_1}{V_1} = \frac{L_2}{V_2} = \ldots = \frac{L_n}{V_n} = \frac{L_0}{V_0} \qquad \text{(VII, 8)}$$

где L_0/V_0 — соотношение общих газовой и жидкостной нагрузок.

Таким образом, условия оптимального распределения нагрузок, определенные в главе IV, позволяют построить весьма просто реализуемые системы автоматики для оптимального распределения нагрузок между теплообменными аппаратами, массообменными аппаратами и химическими реакторами.

Эти системы не требуют предварительного экспериментального определения характеристик агрегатов и применения сложных вычислительных устройств. Простота и надежность этих систем позволяют широко применять их в условиях химического производства.

ПРИМЕРЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗОК МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНО РАБОТАЮЩИМИ АГРЕГАТАМИ

В этой главе будет рассмотрено несколько примеров систем распределения нагрузок, демонстрирующих методику решения задачи распределения в промышленных условиях и экономическую эффективность распределения.

БЛОКИ РАЗДЕЛЕНИЯ ВОЗДУХА

Блок разделения воздуха предназначен для получения кислорода из атмосферного воздуха [123]. Низкотемпературное разделение воздуха основано на различии температур кипения жидкого кислорода и азота. Предварительно воздух сжимается компрессорами с целью последующего расширения и охлаждения до низкой температуры, при которой воздух переходит в жидкое состояние. Жидкий воздух разделяется в ректификационной колонне. Затраты в основном определяются затратами электроэнергии на сжатие воздуха перед разделением.

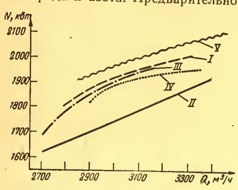


Рис. 67. Характеристики кислородных блоков.

Рассматриваемая установка разделения воздуха состоит из пяти блоков. Основная часть поступающего воздуха (95—96%) сжимается до давления 5,5—6 *ат*, необходимого для разделения воздуха путем двукратной ректификации, а остальные 4—5% воздуха сжимаются до 160—200 *ат* для компенсации потерь холода. Так как при снижении и увеличении нагрузки режим ректификации изменяется, зависимость затрат электроэнергии N от нагрузки носит нелинейный характер.

Блок разделения воздуха состоит из большого количества разнообразных взаимосвязанных аппаратов. Поэтому составление математического описания блока и выделение определяю-

щего параметра затруднительно. В связи с этим при распределении нагрузок использовались экспериментально полученные статические характеристики. На рис. 67 приведены характеристики *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* блоков разделения в координатах «нагрузка по кислороду — затраты электроэнергии».

Характеристики блоков представляют собой разрывные функции, состоящие из точки с координатами (0,0), соответствующей полной остановке агрегата, и непрерывного отрезка кривой

$$N_i(Q_i) = \begin{cases} 0 \text{ при } Q_i = 0 \\ \varphi_i(Q_i) \text{ при } Q_{i\,\min} \leqslant Q_i \leqslant Q_{\max} \end{cases} \qquad \text{(VIII,1)}$$

Распределение общей нагрузки Q_0 между блоками проводилось с помощью динамического программирования.

Решение задачи состоит из двух частей.

На первом этапе осуществляется расчет функций Беллмана

$$R_i(Q_0) = \min\left[\varphi_i(Q_i) + R_{i-1}(Q_0 - Q_i)\right] \qquad \text{(VIII,2)}$$
$$0 \leqslant Q_i \leqslant Q_0$$
$$Q_i = Q_i^{\text{опт}}(Q_0)$$

где Q_i — нагрузка *i*-того агрегата, *м*³ кислорода/*ч*; $\varphi_i(Q_i)$ — затраты электроэнергии на *i*-том агрегате, *квт*; $R_i(Q_0)$ — затраты электроэнергии при оптимальном распределении нагрузки Q_0 между агрегатами 1, 2, ..., *i*; $Q_i^{\text{опт}}$ — нагрузка *i*-того агрегата при оптимальном распределении нагрузки Q_0 между *i* агрегатами.

В результате расчета получают таблицу значений оптимальной целевой функции $R_5(Q_0)$ для нагрузок в пределах от 2700 до 17 000 *м*³/*ч* и таблицы функции $Q_i^{\text{опт}}(Q_0)$. Затем, задаваясь нагрузками Q_0 в диапазоне $2700 \leqslant Q_0 \leqslant 17\,000$ *м*³/*ч*, рассчитывают оптимальные нагрузки Q_i^* по рекурентным формулам (см. гл. III)

$$Q_n^*(Q_0) = Q_n^{\text{опт}}(Q_0)$$
$$Q_{n-1}^*(Q_0) = Q_{n-1}^{\text{опт}}(Q_0 - Q_n^*) \qquad \text{(VIII,3)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_1^*(Q_0) = Q_1^{\text{опт}}(Q_0 - Q_n^* - Q_{n-1}^* - \ldots - Q_2^*)$$

В результате получают таблицы значений оптимальных нагрузок каждого агрегата при заданной общей нагрузке. Этот этап расчета повторяется только при изменении характеристик агрегатов.

Второй этап расчета состоит в определении величин Q_1^*, Q_2^*, ..., Q_n^* по таблицам значений $Q_i^*(Q_0)$ при фиксированной нагрузке Q_0. Этот этап расчета повторяется всякий раз при изменении общей нагрузки Q_0.

При общей нагрузке $Q_0 = 15\,000$ *м³/ч* кислорода оптимальным будет следующее распределение нагрузки агрегатов:

Агрегат №	Нагрузка, *м³/ч*
1	2800
2	2700
3	2700
4	3350
5	3450

Общие затраты электроэнергии при оптимальном распределении нагрузки, равной 15 000 *м³/ч*, составляют 9175 *квт*, в то время как при распределении той же нагрузки поровну между всеми агрегатами тратится 9415 *квт*, т. е. на 2,5% больше.

СКРУББЕРЫ МЕДНОАММИАЧНОЙ ОЧИСТКИ ГАЗА В ПРОИЗВОДСТВЕ АММИАКА

В производстве синтетического аммиака из натурального газа азото-водородная смесь, служащая сырьем для агрегатов синтеза, предварительно очищается от примесей углекислого газа и окиси углерода. Очистка газа от CO_2 производится водой в скрубберах водной очистки; для очистки от CO используется медноаммиачный раствор. Окись и двуокись углерода необходимо удалять из газа почти полностью, так как кислородсодержащие соединения являются сильнейшими ядами для катализатора синтеза аммиака. Ниже будет приведено описание системы распределения нагрузок между скрубберами водной очистки; в настоящем разделе описывается система распределения нагрузок процесса медноаммиачной очистки.

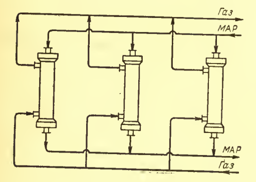


Рис. 68. Схема скрубберов медно-аммиачной очистки.

На рис. 68 изображена схема установки, состоящей из трех скрубберов. Газ, содержащий 3—5% CO и 1—2% CO_2, под давлением 125 *ат* поступает в низ скруббера; сверху, через разбрызгивающее устройство поступает медноаммиачный раствор МАР. После очистки содержание CO в газе не должно превышать 40 млн. долей. Оптимальное распределение нагрузок между скрубберами должно обеспечить минимальное содержание CO в газе после очистки.

Как было показано в главе IV, для оптимального распределения нагрузок необходимо знать коэффициент массопередачи скруббера. Так как времена пробега отдельных скрубберов

(время, прошедшее от последнего капитального ремонта) различаются весьма значительно, степень засорения и загрязнения насадки скрубберов различна. Средние коэффициенты массопередачи скрубберов могут быть определены только экспериментально.

Для расчета коэффициентов массопередачи используется математическая модель скруббера, полученная путем совместного решения уравнений материального и теплового балансов и уравнения массопередачи. При разработке математической модели приняты следующие упрощающие предположения[124]:

1. Гидродинамика потоков жидкости и газа в скруббере описывается законом идеального вытеснения.

2. Изменение температуры раствора прямо пропорционально увеличению концентрации CO в растворе.

3. Изменение концентрации CO_2 в растворе прямо пропорционально изменению концентрации CO в растворе.

4. Температура газа на выходе из скруббера $t_к$ на 2° C превышает температуру входящего раствора $\theta_н$.

Процесс перехода окиси углерода CO из газа в раствор описывается уравнением массопередачи

$$G = KF\Delta_{ср} \tag{VIII,4}$$

$$\Delta_{ср} = \frac{X_к - X_н}{\int\limits_{X_н}^{X_к} \frac{dX}{X_р - X}}$$

обозначения см. в гл. IV.

Зависимость равновесной абсорбционной способности $X_р$ от концентрации CO в газе, температуры раствора и состава раствора исследовалась рядом авторов[125, 126]. В работе[124] использовалось следующее выражение:

$$X_р = V_m \frac{\alpha P_{CO}}{1 + \alpha P_{CO}}$$

$$\alpha = \frac{35{,}7 - 4{,}33C + 0{,}45\,(25 - \theta)}{4{,}33C - 0{,}45\,(25 - \theta)}$$

$$C = 3 - R + \sqrt{(R - 3)^2 + 18{,}78} \tag{VIII,5}$$

$$R = \frac{[NH_3]}{[Cu^+]}$$

$$P_{CO} = \frac{PY}{1 + Y}$$

где θ — температура раствора, °C; $[NH_3]$, $[Cu^+]$ — концентрация аммиака и одновалентной меди в растворе; P — давление газа; P_{CO} — парциальное давление CO; V_m — максимальный объем CO, который может быть поглощен раствором

$$V_m = 22{,}4\,[Cu^+]$$

Материальный баланс скруббера

$$G = V\,(Y_н - Y_к) = L\,(X_к - X_н) \tag{VIII,6}$$

Тепловой баланс скруббера

$$V\left(1 + Y_н + Y'_н\right) ct_н + Lc'\theta_н + q_{CO}\left(Y_н - Y_к\right) V +$$
$$+ q_{CO_2}\left(Y'_н - Y'_к\right) V = Lc'\theta_к + V\left(1 + Y_н + Y'_к\right) ct_к \quad (VIII,7)$$

где $Y'_н$, $Y'_к$ — начальная н конечная концентрацнн CO_2 в газе; c', c — удельная теплоемкость раствора н газа; q_{CO}, q_{CO_2} — теплоты поглощения CO н CO_2.

Разрешая систему уравнений [(VIII, 4) — (VIII, 7)] относительно K и проведя некоторые упрощения, получают аналитическую зависимость коэффициента массопередачи K от размеров скруббера, параметров технологического режима и свойств газа и жидкости

$$K = \varphi\{Y_н\ Y_к,\ F,\ l,\ c,\ c',\ q_{CO},\ q_{CO_2},\ t,\ \theta,\ P,\ [NH_3],\ [Cu^+],\ [CO_2],\ L,\ V\} \quad (VIII,8)$$

где l — высота насадкн.

По данным экспериментального исследования были рассчитаны коэффициенты массопередачи при различных режимах работы скруббера. Оказалось, что поскольку сопротивление массопередаче определяется в основном сопротивлением газовой пленки, коэффициент массопередачи не зависит от расхода раствора и зависит от расхода газа по закону

$$K_i = A_i V_i^{\alpha} \quad (VIII,9)$$

Коэффициенты K_i для разных скрубберов имеют значения

$$K_1 = 0{,}00667\left(\frac{V_1}{1000}\right)^{0,8}$$
$$K_2 = 0{,}00713\left(\frac{V_2}{1000}\right)^{0,8}$$
$$K_3 = 0{,}00673\left(\frac{V_3}{1000}\right)^{0,8}$$

Оптимальное распределение нагрузок определяется по формулам

$$V_i = \frac{V_0 A_i^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\sum_{i=1}^{3} A_i^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$
$$L_i = \frac{L_0 A_i^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\sum_{i=1}^{3} A_i^{\frac{1}{1-\alpha}}} \quad (VIII,10)$$

Подставляя значения A_i и α в выражение (VIII, 10), получаем

$V_1 = 0{,}292\ V_0 \qquad V_2 = 0{,}404\ V_0 \qquad V_3 = 0{,}304\ V_0$

При общей нагрузке $V_0 = 36$ тыс. $м^3/ч$ и $L_0 = 78$ $м^3/ч$ оптимальные нагрузки агрегатов составляют (в тыс. $м^3/ч$):

$$V_1 = 10{,}6 \qquad V_2 = 10{,}9 \qquad V_3 = 14{,}6$$

При этом содержание CO на выходе из скрубберов

$$Y_{к1} = Y_{к2} = Y_{к3} = 10{,}5\ \%$$

Общее количество CO, поступающей в цех синтеза

$$10{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 36 \cdot 10^3 = 0{,}378\ м^3/ч$$

При равномерном распределении $V_1 = V_2 = V_3 = 12$ тыс. $м^3/ч$, содержание CO в газе

$$Y_{к1} = 13{,}7\ \% \qquad Y_{к2} = 12{,}0\ \% \qquad Y_{к3} = 6{,}2\ \%$$

При этом общее количество CO, поступающей в цех синтеза, составит 0,389 $м^3/ч$, т. е. на 1,3% больше, чем при оптимальном распределении.

Другой пример решения задачи распределения нагрузок между скрубберами медноаммиачной очистки приведен в работе [127]. В этом случае предполагается, что на каждом из скрубберов установлена система автоматического регулирования, поддерживающая такое соотношение расхода синтез-газа и очищающего раствора, которое обеспечивает заданную концентрацию абсорбируемого компонента в газе на выходе из скруббера.

При этих условиях зависимость между нагрузкой скруббера по газу и расходом раствора однозначна и имеет вид выпуклой кривой. Распределение нагрузок должно обеспечить минимальные затраты раствора.

В работе рассматривается режим работы цеха при значительнем колебании нагрузки цеха по газу (до 20—25%).

Расчет оптимального режима был произведен по следующему алгоритму: задаваясь нагрузкой цеха по газу, рассчитывали первые производные характеристик аппаратов. Увеличивали нагрузку аппарата, для которого значение производной было наименьшим. Затем задача рассчитывалась вновь, с учетом произведенного изменения рабочей точки.

Сравнение рекомендуемых режимов работы цеха с действительными показало, что при работе по рекомендуемому режиму выигрыш в подаче раствора составляет 15%.

СКРУББЕРЫ ВОДНОЙ ОЧИСТКИ

На рис. 69 изображена технологическая схема отделения водной очистки газа от углекислоты. Сжатый до 28 *ат* газ, содержащий 20% CO_2, поступает снизу в пять скрубберов водной очистки. Сверху скруббер орошается водой. После очистки газ содержит 1—2% углекислоты.

Вода из скрубберов поступает в емкости *I* и *II* для выделения растворенной в ней азотоводородной смеси и углекислоты.

Постановка задачи распределения для скрубберов водной очистки имеет некоторые особенности по сравнению с примером, рассмотренным в главе IV. Общее количество воды, используемой для очистки, может изменяться в широких пределах и практически почти не ограничено. Однако увеличение расхода воды влечет за собой увеличение потерь азотоводородной смеси за счет растворения этих газов в воде. Потери водорода приблизительно пропорциональны количеству отмывающей воды.

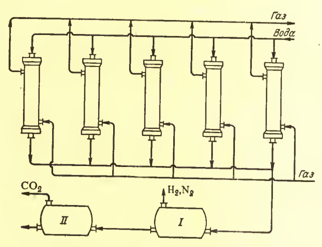


Рис. 69. Схема установки очистки газа от CO_2.

Углекислота, остающаяся в газе после промывки водой, почти полностью удаляется в отделение медноаммиачной очистки, однако увеличение содержания CO_2 в газе после водной очистки вызывает увеличение затрат пара в отделении регенерации медноаммиачного раствора.

Оптимальное распределение нагрузок между скрубберами должно обеспечить минимальные затраты в производстве, включая затраты, связанные с потерями азотоводородной смеси, и затраты на регенерацию медноаммиачного раствора.

Таким образом, задача распределения ставится в следующем виде:

найти распределение нагрузок $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и $L_1, L_2, \ldots$ $\ldots, L_n$, обеспечивающее минимум функции

$$I = q_п \alpha_п \sum_{i=1}^{n} V_i Y_{кi} + \beta q_\beta \sum_{i=1}^{n} L_i + q_в \sum_{i=1}^{n} L_i \qquad \text{(VIII, 11)}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \qquad V_{i\,\min} \leqslant V_i \leqslant V_{i\,\max}$$

где $\alpha_п$ — затраты пара на выделение 1 $м^3$ CO_2 в отделении регенерации, $ккал/м^3$ CO_2; β — растворимость водорода в воде, $м^3/м^3$ воды; $q_п$, q_β, $q_в$ — цены на пар (*руб/ккал*), водород (*руб/м³*) и воду (*руб/м³*).

По производственным данным $\alpha_п = 5{,}38$ *ккал/м³* CO_2; $\beta = 0{,}39$ $м^3/м^3$, $q_п = 3{,}9 \cdot 10^{-6}$ *руб/ккал*, $q_\beta = 0{,}306$ *руб/м³*, $q_в = 0{,}0122$ *руб/м³*.

Преобразуем целевую функцию (VIII, 11):

$$\min I = \min \left\{ q_п \alpha_п V_0 Y_0 - q_п \alpha_п \sum_{i=1}^{n} G_i + (\beta q_\beta + q_в) \sum_{i=1}^{n} L_i \right\} =$$

$$= q_п \alpha_п V_0 Y_0 - \max \left\{ q_п \alpha_п \sum_{i=1}^{n} G_i - (\beta q_\beta + q_в) \sum_{i=1}^{n} L_i \right\} \quad \text{(VIII, 12)}$$

где G_i — количество CO_2, переданного из газа в воду в скруббере.

Подставляя в выражение (VIII, 12) значения $\alpha_п$, β, $q_п$, q_β, $q_в$, получаем, что задача управления может быть сформулирована следующим образом:

найти $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и $L_1, L_2, \ldots, L_n$, обеспечивающие максимум функции

$$I^* = 21 \sum_{i=1}^{n} G_i - 0{,}0242 \sum_{i=1}^{n} L_i$$

при (VIII, 13)

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \quad V_{i\,\min} \leqslant V_i \leqslant V_{i\,\max}$$

Задача управления представляет собой задачу нелинейного программирования. Предположим, что экстремум I^* находится внутри области ограничений. Тогда оптимальное распределение определится из системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial G_i}{\partial V_i}(V_i, L_i) + \lambda = 0 \\ & 21 \frac{\partial G_i}{\partial L_i}(V_i, L_i) - 0{,}0242 = 0 \\ & \sum_{i=1}^{n} V_i = V_0 \end{aligned} \right. \quad \text{(VIII, 14)}$$

Исследования процесса абсорбции CO_2 водой показали, что процесс протекает почти изотермически [128–130] и зависимость количества абсорбируемого CO_2 от нагрузки имеет вид

$$G_i = \frac{V_i (Y_н - \alpha X_н) \left[1 - e^{-K_i F_i \left(\frac{1}{V_i} - \frac{\alpha}{L_i} \right)} \right]}{\frac{\alpha V_i}{L_i} - e^{-K_i F_i \left(\frac{1}{V_i} - \frac{\alpha}{L_i} \right)}} \quad \text{(VIII, 15)}$$

где K_iF_i — приведенный коэффициент массопередачи, зависящий от скорости газа

$$K_iF_i = M_iV_i^{0,55} \qquad \text{(VIII, 16)}$$

Коэффициент M_i зависит от величины и состояния поверхности массопередачи и для одинаковых по конструкции скрубберов может изменяться в значительных пределах.

Подставляя в систему (VIII, 14) выражения (VIII, 15) и (VIII, 16), получаем окончательную систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{V_i}{M_iV_i^{0,55}} = \mu \\ \sum\limits_{i=1}^{5} V_i = V_0 \\ \dfrac{(Y_н - \alpha X_н)\left(1 - e^{-z_i} - z_ie^{-z_i}\right)}{\alpha\left[1 - \dfrac{L_i}{\alpha V_i}e^{-z_i}\right]^2} = 0{,}00115 \\ z_i = M_iV_i^{0,55}\left(\dfrac{1}{V_i} - \dfrac{\alpha}{L_i}\right) \end{cases} \qquad \text{(VIII, 17)}$$

где α — константа Генри в уравнении равновесия системы углекислый газ — вода.

Для решения задачи распределения нагрузок между скрубберами были экспериментально определены коэффициенты $M_i \dfrac{м^3/ч}{тыс.\ м^3/ч}$ для каждого из скрубберов при температуре 16° С: $M_1 = 732$ $M_2 = 780$ $M_3 = 1095$ $M_4 = 1052$ $M_5 = 865$.

Общая нагрузка скрубберов $V_0 = 75$ тыс. $м^3/ч$; минимальная нагрузка скрубберов $V_{min} = 8$ тыс. $м^3/ч$; максимальная нагрузка скрубберов $V_{max} = 20$ тыс. $м^3/ч$; содержание CO_2 в газе до очистки $Y_н = 25\%$; давление газа $P_0 = 28$ *ат*; температура воды $t = 16°$ С, $\alpha = 0{,}0234$ при $t = 16°$ С.

Подставляя исходные данные в систему (VIII, 17), приходим к окончательной системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{V_i^{0,45}}{M_i} = \lambda \\ \sum\limits_{i=1}^{5} V_i = 75 \\ \dfrac{1 - e^{-z_i} - z_ie^{-z_i}}{0{,}0234\left(1 - \dfrac{L_i}{0{,}0234V_i}e^{-z_i}\right)^2} = 0{,}33 \\ z_i = M_iV_i^{0,55}\left(\dfrac{1}{V_i} - \dfrac{0{,}0234}{L_i}\right) \\ 8 \leqslant V_i \leqslant 20 \\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5 \end{cases} \qquad \text{(VIII, 18)}$$

Ниже приведены результаты решения задачи распределения нагрузок между скрубберами (нагрузки V_i, L_i и содержание углекислого газа на выходе $Y_{К, i}$):

№ скруббера	V $м^3/ч$	L $м^3/ч$	$Y_К$ %
1	9,75	685	2,72
2	11,05	785	2,72
3	20,00	1440	2,38
4	20,00	1425	2,55
5	14,10	990	2,72

Затраты I при оптимальном управлении составляют 125,8 *руб/ч*, что на 15% меньше затрат в обычном производственном режиме.

РЕАКТОРЫ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ОКИСИ ЭТИЛЕНА[66]

В каталитическом процессе получения окиси этилена из этилена узел реактора состоит из четырех параллельно работающих аппаратов. В реакторы поступают этилен и кислород. В абсорбере окись этилена отделяется от непрореагировавшего

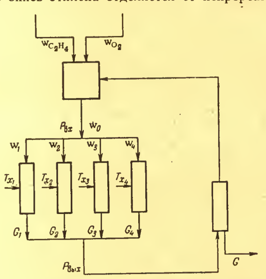


Рис. 70. Схема узла реакторов этиленового производства.

сырья, которое возвращается на вход системы реакторов (рис. 70). Реактор представляет собой трубчатый аппарат, заполненный катализатором и охлаждаемый хладоагентом.

В работе[57] решается задача распределения потоков сырья между реакторами и выбора температур хладоагентов, обеспечивающих максимальную производительность процесса.

В первую очередь необходимо построить математическую модель реактора. Зависимость производительности реактора от нагрузки и температуры определяется на основании решения уравнений кинетики реакций и материального и теплового баланса реактора.

Процесс получения окиси этилена характеризуется двумя реакциями:

$$\begin{aligned} C_2H_4 + 0{,}5O_2 &\longrightarrow C_2H_4O \\ C_2H_4 + 3O_2 &\longrightarrow 2CO_2 + H_2O \end{aligned} \qquad \text{(VIII, 19)}$$

Первая реакция — основная, реакция окисления, вторая — побочная, реакция горения этилена. Реакции окисления и горения идут в кинетической области.

Кинетические уравнения реакций имеют вид

$$r_j = \frac{k_j p_1}{1 + \frac{a p_1}{p_3}(1 + k_3 p_2) + k_4 p_2 + k_5 p_1 + k_6 p_5} \qquad j = 1,\ 2 \qquad \text{(VIII, 20)}$$

В этом выражении $j = 1$ для реакции окисления, $j = 2$ для реакции горения, a — постоянный коэффициент; k_1, k_2 — константы скорости первой и второй реакций, зависимость которых от температуры выражается уравнением Аррениуса

$$k_j = k_{j0} e^{-\frac{E_j}{RT}} \qquad j = 1,\ 2 \qquad \text{(VIII, 21)}$$

Здесь E_j — энергия активации; константы k_3, k_4, k_5, k_6 — адсорбционные коэффициенты, зависящие от температуры:

$$k_j = k_{j0} e^{\frac{Q_j}{RT}} \qquad j = 3,\ 4,\ 5,\ 6 \qquad \text{(VIII, 22)}$$

Здесь Q_j — теплоты адсорбции; p_j — парциальные давления компонентов, выражаемые через их молярные концентрации:

$$p_j = p y_j \qquad \text{(VIII, 23)}$$

В этом выражении y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 — молярные концентрации этилена, окиси этилена, кислорода, воды и углекислого газа соответственно.

Концентрации y_3, y_4, y_5 могут быть выражены через концентрации y_1 и y_2, исходя из стехиометрических уравнений реакций

$$\begin{aligned} y_3 &= y_{30} + 3(y_1 - y_{10}) + 2{,}5(y_2 - y_{20}) \\ y_4 &= -2(y_1 - y_{10}) - 2(y_2 - y_{20}) \\ y_5 &= -2(y_1 - y_{10}) - 2(y_2 - y_{20}) \end{aligned} \qquad \text{(VIII, 24)}$$

Считая реактор аппаратом идеального вытеснения, запишем уравнение материального баланса для элемента длины реактора:

для этилена

$$\frac{dy_1}{dl} = \frac{S(k_1 + k_2)p_1}{w\left[1 + \frac{ap_1}{p_3}(1 + k_3p_2) + k_4p_2 + k_5p_4 + k_6p_5\right]} \qquad \text{(VIII, 25)}$$

для окиси этилена

$$\frac{dy_2}{dl} = \frac{Sk_2p_1}{w\left[1 + \frac{ap_1}{p_3}(1 + k_3p_2) + k_4p_2 + k_5p_4 + k_6p_5\right]} \qquad \text{(VIII, 25a)}$$

где S — поперечное сечение реактора; w — нагрузка реактора.

Уравнение теплового баланса для элемента длины реактора

$$\frac{dT}{dl} = \frac{S}{wc} \cdot \frac{(Q_1k_1 + Q_2k_2)p_1}{1 + \frac{ap_1}{p_3}(1 + k_3p_2) + k_4p_2 + k_5p_4 + k_6p_5} - B_т(T - T_х) \qquad \text{(VIII, 26)}$$

где c — теплоемкость; $B_т$ — параметр теплопередачи, зависящий от гидродинамического режима реактора; T — температура в реакторе; $T_х$ — температура хладоагента.

Уравнение изменения давления:

$$\frac{dp}{dl} = \frac{S}{w}\left(-\frac{A_cT}{p}\right) \qquad \text{(VIII, 27)}$$

где A_c — параметр гидравлического сопротивления.

Интегрируя уравнения (VIII, 25), (VIII, 26) вдоль длины реактора и решая совместно уравнения (VIII, 21) — (VIII, 27), определяют концентрацию окиси этилена на выходе из реактора y_2 и производительность реактора G

$$G = Vy_2 \qquad \text{(VIII, 28)}$$

При распределении нагрузок между реакторами необходимо учесть два ограничения:

1. Температура в реакторе не должна превышать максимально допустимую, после достижения которой начинается интенсивное разложение окиси этилена

$$\max T \leqslant T_{доп} \qquad \text{(VIII, 29)}$$

2. Давление на выходе из реакторов ограничено сопротивлением компрессоров и аппаратов

$$p \geqslant p_{min} \qquad \text{(VIII, 30)}$$

Задача распределения нагрузок ставится следующим образом:

найти w_1, w_2, w_3, w_4 и T_1, T_2, T_3, T_4, обеспечивающие максимум функции цели

$$G(w_1, w_2, w_3, w_4, T_1, T_2, T_3, T_4) \qquad \text{(VIII, 31)}$$

при заданной общей нагрузке реакторов

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w_0 \qquad \text{(VIII, 32)}$$

и при условиях (VIII, 29), (VIII, 30).

Особенность данной задачи распределения заключается в том, что функция цели (VIII, 31), строго говоря, не является аддитивной функцией управляющих параметров w_i и T_i, так как система параллельно работающих реакторов объединена рециклом (см. рис 70).

Однако в данной задаче влияние выхода на вход через рецикл невелико, что позволяет приблизительно считать

$$G = \sum_{i=1}^{4} G_i(w_i, T_i)\,\eta \qquad \text{(VIII, 33)}$$

где η — коэффициент рециркуляции.

Другая особенность задачи, усложняющая ее решение, это ограничение (VIII, 30). Для того чтобы заменить ограничение на выходную величину ограничением на управляющие параметры, используется преобразование, полученное в результате интегрирования уравнения (VIII, 27).

$$p_{\text{вх}}^2 - p_{\text{вых}}^2 = 2A_{\text{с}}(w)\,T_{\text{ср}}\frac{V_{\text{р}}}{w} \qquad \text{(VIII, 34)}$$

где $V_{\text{р}}$ — объем реактора.

Решая уравнение (VIII, 34), заменяют ограничение (VIII, 30) условием

$$w_i \leqslant w_{i\,\max} \qquad \text{(VIII, 35)}$$

При решении задачи распределения сначала решалась задача оптимизации температуры в каждом реакторе

$$G_i^*(w_i) = \max_{T_i} G_i(w_i, T_i) \qquad \text{(VIII, 36)}$$

а затем градиентным методом осуществлялся поиск решения задачи распределения

$$G = \max \sum_{i=1}^{4} G_i(w_i) \qquad \text{(VIII, 37)}$$

Метод градиента приводил к точке максимума за 15—30 шагов.

В табл. 8 приведены результаты расчета оптимального распределения нагрузок между реакторами, характеризующимися разным состоянием катализатора [коэффициенты k_{10} и k_{20} в уравнениях (VIII, 21) и (VIII, 22) определены экспериментально]. Так как состояние катализатора в одном из реакторов существенно отличается от состояния катализатора в других, нагрузка на этом реакторе меньше.

ТАБЛИЦА 8

Распределение нагрузок между реакторами

Показатели	Номер реактора				Производительность (в условных единицах)
	1	2	3	4	
$k_{10} \cdot 10^{-5}$, $сек^{-1}$	3,75	3,5	1,5	3	—
$k_{20} \cdot 10^{-7}$, $сек^{-1}$	3,75	3,25	1,6	3	—
Начальное распределение (в условных единицах)	7,58	9,32	8,46	8,46	3,07
Оптимальное распределение (в условных единицах)	9,98	9,63	4,42	9,78	3,16

Производительность увеличивается по сравнению с начальным распределением на 3%.

РЕАКТОРЫ ПРОИЗВОДСТВА ХЛОРВИНИЛА

Большой интерес представляет опробованная в промышленных условиях система управления производством хлорвинила (японский завод, находящийся в эксплуатации с 1964 г.). Наряду с другими алгоритмами оптимизации, в этой системе используется оптимальное распределение нагрузок между параллельными агрегатами [131].

Производство состоит из нескольких участков.

На двух участках технологической схемы имеются системы параллельно работающих аппаратов — реакторы крекинга дихлорэтана и ацетиленовые реакторы. Рассмотрим, как осуществляется управление этими аппаратами.

На рис. 71 изображена блок-схема установки крекинга дихлорэтана. Участок состоит из трех параллельно включенных крекинг-печей К-1, К-2, К-3. В крекинг-печи дихлорэтан подвергается термическому крекингу и разлагается на HCl и хлорвинил

$$ClCH_2\text{-}CH_2Cl \longrightarrow CH_2 = CHCl + HCl \qquad (VIII, 38)$$

Хлористый водород и хлорвинил разделяются в сепараторах С-1 и С-2, а остатки непрореагировавшего дихлорэтана возвращаются на вход крекинг-печей.

В печи также протекают побочные реакции, сопровождающиеся закоксовыванием трубчатого змеевика, поэтому печи периодически останавливают для выжига кокса. В то время как в одной из печей происходит регенерация, две остальные работают под максимальной допустимой нагрузкой. В остальное время нагрузки между печами перераспределяются оптимальным образом.

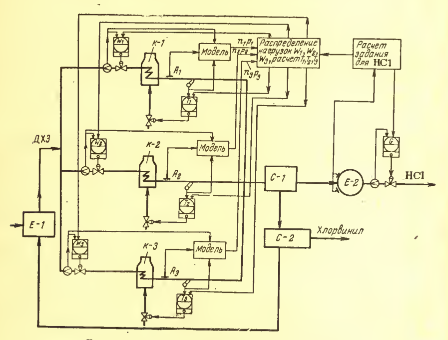


Рис. 71. Схема установки крекинга дихлорэтана:
Е-1, *Е*-2 — емкости; *К*-1, *К*-2, *К*-3 — печи; *С*-1, *С*-2 — сепараторы.

Управление системой осуществляется на основе простых математических моделей, определяющих зависимость степени пиролиза дихлорэтана x и выхода хлорвинила y от нагрузки реактора w и температуры газа на выходе из реактора T

$$x_i = lT_i + mw_i + n_i$$

$$y_i = 1 - p_i(1 - rw_i)\,x_i \qquad \text{(VIII, 39)}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3$$

Константы l, m, n_i, p_i и r периодически уточняются для учета изменения закоксованности печей и качества сырья по анализам A_1; A_2, A_3.

Целью оптимального управления является достижение заданной производительности по HCl при минимальных производственных затратах. Затраты складываются из затрат на сырье,

на сепарацию, на топливный газ, а также из потерь, связанных с получением побочных продуктов

$$Q = \sum_{i=1}^{3} [q_i w_i x_i + f_i (w_i, T_i, x_i, y_i) + + f_i^* (w_i, T_i, x_i, y_i, \eta) + q_i w_i x_i (1 - y_i)] \quad \text{(VIII, 40)}$$

где q_i — цена на сырье; f_i — затраты на сепарацию; f_i^* — затраты на топливный газ; η — к. п. д. печи.

Подставляя x_i и y_i из (VIII, 39), получаем

$$Q = \sum_{i=1}^{3} Q_i (w_i, T_i) \quad \text{(VIII, 41)}$$

На рис. 71 изображена схема управления. Коррекцию модели (расчет коэффициентов n_i, p_i) проводят на основе измерения расхода сырья, температуры и концентрации продуктов на выходе из реакторов. Используя откорректированные модели, вычислительная машина рассчитывает оптимальные температуры и оптимальное распределение нагрузок.

Расчет оптимального распределения нагрузок производится в следующих случаях:

1. Когда изменение констант n_i и p_i в уравнении модели превышает допустимые пределы. Это происходит при постепенном увеличении закоксованности змеевиков или при изменении качества сырья.

2. Когда режимные параметры одной из печей достигают предельных значений.

3. Когда изменяется потребность в хлористом водороде на следующей ступени производства. Малые колебания в потреблении HCl ацетиленовым реактором демпфируются буферной емкостью. При большом изменении расхода давление в буферной емкости значительно изменяется, что служит сигналом для изменения нагрузок реакторов.

Так как время переходного процесса в реакторах составляет 15—20 *мин*, оптимизация производится не чаще, чем через 30 *мин*. Оптимизация обеспечивает уменьшение затрат на 1,5%.

В реакторах для получения ацетилена (рис. 72) задача распределения нагрузок ставится несколько иным образом. Дело в том, что катализатор этого процесса очень дорог и его нельзя регенерировать. Поэтому потеря активности катализатора сильно влияет на производственные затраты. Чем выше температура и скорость реагентов, тем быстрее падает активность катализатора. Сложность решения задачи распределения заключается в том, что активность катализатора α существенно изменяется вдоль длины реактора l (рис. 73). Однако удалось показать, что кривая изменения активности вдоль длины реактора может быть представлена простым уравнением, содержащим перемен-

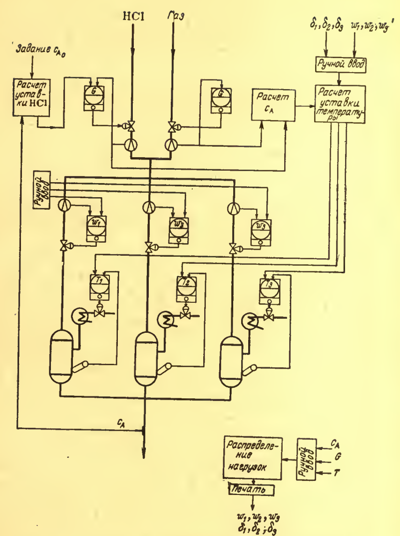


Рис. 72. Схема блока реакторов для получения ацетилена.

ную величину δ_i определяющую отличие одной кривой от другой. Удалось также установить связь между скоростью потери активности, начальным состоянием и режимными параметрами: температурой T_i и нагрузкой реактора w_i.

Эмпирическое выражение для определения скорости потери активности катализатора вдоль всего реактора $d\alpha/dt$ имеет вид

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = f(\delta_i,\ w_i,\ T_i) \qquad \text{(VIII, 42)}$$

где t — время.

В то же время степень конверсии ацетилена определяется выражением вида

$$x_{A_i} = \psi(\delta_i,\ w_i,\ T_i,\ c_A) \qquad \text{(VIII, 43)}$$

где c_A — концентрация ацетилеиа на входе в реактор.

Так как степень конверсии ацетилена должна быть одинаковой для всех реакторов и определяется требуемым количеством избыточного ацетилена, выражение (VIII, 43) определяет отношение между T_i и w_i для каждого реактора.

Оптимальное распределение нагрузок производится методом проб и ошибок так, чтобы суммарные потери активности катализатора были минимальными.

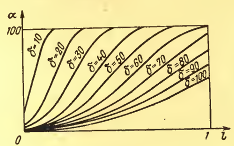


Рис. 73. Зависимость α от δ.

Активность катализатора изменяется сравнительно медленно. Поэтому корректировка значений параметров δ_i осуществляется один раз в сутки. Исходными данными служит профиль температур реактора. Затем оптимальное распределение корректируется методом наискорейшего спуска.

Расчеты оптимального распределения по этой программе занимают довольно много времени и проводятся довольно редко (не чаще одного раза в сутки). Поэтому исходные данные (температурные профили и общая нагрузка G) для расчета δ_i вводятся в машину вручную. Результат решения задачи оптимального распределения (соотношение нагрузок реакторов $w_1 : w_2 : w_3$)

печатается на специальном бланке, и оператор вручную устанавливает новое распределение нагрузок. В промежутке между перераспределениями нагрузок осуществляется управление температурой реактора. Концентрация c_A рассчитывается по расходам HCl и крекинг-газа (см. рис. 72).

Расчеты показывают, что за счет оптимального перераспределения нагрузок скорость падения активности катализатора может быть уменьшена вдвое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pearson I. D., Decomposition, coordination and multilevel systems, IEEE, Trans. Syst. Sci. Cybernet., 2, № 1 (1966).
2. Lasdon L. S., Schoffler J. D., Decentralized Plant Control, ISA Transactions, 5, № 2 (1966).
3. Плискин Л. Г., Оперативная оптимизация производственных комплексов непрерывного действия, Автоматика и телемеханика, № 1, 2 (1967).
4. Голованов О. В. и др., Система автоматизированного оперативного управления аммиачным заводом «Каскад», Труды ЦНИИКА, 1967.
5. Гурин Л. С., Задачи и методы оптимального распределения ресурсов, Изд. «Советское радио», 1968.
6. Gossen H. H., Entwicklung der Gesetze des menschlichten Verkehers und der daraus flussenden Regeln menschlichen Handeln, Berlin, 1854. (Цитируется по кн. Л. Н. Волгина «Проблема оптимальности в теоретической кибернетике», Изд. «Советское радио», 1968, стр. 62.)
7. Болотов В. В. Теоретические основы выбора экономического режима сложных электроэнергетических систем, Изд. АН СССР, 1947.
8. Горнштейн В. М., Наивыгоднейшее распределение нагрузок между параллельно работающими электростанциями, Госэнергоиздат, 1949.
9. Минскер И. Н., Оптимальное распределение нагрузок между параллельными агрегатами химического производства, Труды III конференции молодых специалистов, ЦНИИКА, 1963.
10. Арис Р., Оптимальное проектирование химических реакторов, Издатинлит, 1964.
11. Робертс С., Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления, Изд. «Мир», 1965.
12. Корчинский А. В., Минскер И. Н., Талицкая Е. А., Оптимизация связей между участками химического производства, Изв. АН СССР, сер. Техн. киберн., № 1 (1966).
13. Лукомский А. И., Теория корреляции и ее применение к анализу производства, Госстатиздат, 1961.
14. Налимов В. В., Статистические методы описания химических и металлургических процессов, Металлургиздат, 1963.
15. Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, Изд. «Мир», 1967.
16. Зойтендейк Г., Методы возможных направлений, Издатинлит, 1963.
17. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И., Линейное и выпуклое программирование, Изд. «Наука», 1967.
18. Уайлд Д. Дж., Методы поиска экстремума, Изд. «Наука», 1967.
19. Деннис Дж. Б., Математическое программирование и электрические цепи, Издатинлит, 1961.

20. Данциг Дж. Б., Линейное программирование, его обобщения и применение, Изд. «Прогресс», 1966.
21. Кюнцн Г. П., Крелле В., Нелинейное программирование, Изд. «Советское радио», 1965.
22. Гасс С., Линейное программнрованне, Физматгиз, 1961.
23. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование, Изд. «Наука», 1969.
24. Фельдбаум А. А., Вычнслительные устройства в автоматнческнх системах, Физматгиз, 1959.
25. Фихтенгольц Г. М., Основы математнческого анализа, Гостехиздат, 1956.
26. Kuhn H. W., Tucker A. W., Nonlinear programming, Proceedings at the Second Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkely, California, 1951.
27. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальиых процессов, Физматгиз, 1962.
28. Фан Ляиь-Цэнь, Вань Чу-Сен, Дискретный принцип максимума, Изд. «Мир», 1967.
29. Беллман Р., Динамическое программирование, Издатинлит, 1960.
30. Ордынцев В. М., Алгоритмическая структурная схема системы автоматического управления химическим производством при помощи вычислительной машины, Автоматика и телемеханнка, XXV, № 4 (1964).
31. Бласяк Е. и др., Технология связанного азота, Госхимиздат, 1961.
32. Лнтвин О. Б., Основы технологии сннтеза каучуков, Изд. «Химия», 1964.
33. Сахаров Н. А., Метод наивыгоднейшего распределення нагрузок между несколькимн параллельно работающими генераторами, Электричество, № 5 (1927).
34. Иванов Е. А., К вопросу о наивыгоднейшем распределении нагрузок между параллельно работающими агрегатами, Электрнчество, № 13 (1930).
35. Зайчик М. Д., Применение целочисленного программирования для решения задачи оптимального распределеиия сырья между установками, «Экономика, организация и планирование нефтеперерабатывающей н нефтехимической промышлеииости», № 1 (1966).
36. Johnson M. L., Lupfer D. E., Distillation column models, Chem. Eng. Progr., 62, № 6 (1966).
37. Синьков В. М., Федотов Л. В., Яннн А. Ф., Принципы построения вычислнтельного устройства для экономичного распределения нагрузки между котлоагрегатами, Энергетика и электротехническая промышленность, № 4 (1965).
38. Этерман И. И., Математические машины непрерывного действия, Машгиз, 1957.
39. Крумм Л. А., Градиентный метод оптимизации режима объединенных энергосистем, Электричество, № 5 (1963).
40. Pyne L. B., Linear programming on an electronic analogue computer, Communic. Electronics, № 24 (1956).

41. Гальперин М. В., Короткевич Г. И., Минскер И. Н., Рыбасов В. И., К решению задачи нелинейного математического программирования с одним и многими экстремумами на аналоговых вычислительных устройствах, Изв. АН СССР, сер. техн. кибери., № 4 (1964).
42. Моцкус И. Б., Многоэкстремальные задачи в проектировании, Изд. «Наука», 1967.
43. Кузнецов И. Н., Оптимальное распределение ограниченных средств для выпукло-вогнутой функции выигрыша, Изв. АН СССР, сер. техн. киберн., № 5 (1964).
44. Гальперин И. Н., Короткевич Г. И., Рыбасов В. И., Вопросы построения быстродействующих аналоговых машин для многократного решения задач линейного и выпуклого программирования, IV Всесоюзная конференция по теории и методам математического моделирования, Киев, 1964.
45. Roberts S. M., Feed allocation to multilevel reactor systems by Dynamic Programming, Chem. Eng. Progr., Syspos. Ser., 59, № 46 (1963).
46. Беллман Р., Дрейфус С., Прикладные задачи динамического программирования, Изд. «Наука», 1965.
47. Борисов Ю. П. и др., Применение метода динамического программирования для нахождения оптимального распределения добычи нефти между различными объектами, Научно-технический сборник по добыче нефти, вып. 30, ВНИИ, 1966.
48. Karush W. A., A general algorithm for distribution of efforts, Manag. Sci., 9, № 1 (1962).
49. Вознесенский А. А., Метод наивыгоднейшего распределения нагрузок между двумя агрегатами, Электрические станции, № 4 (1954).
50. Сейфулла Д. О., К методу наивыгоднейшего распределения нагрузки между двумя агрегатами (совмещение энергетических характеристик), Электрические станции № 6 (1955).
51. Methot I. C., Clouter L., Cholette A., New optimization method is highly suitable for chemical engineering applications, Can. J. Chem. Eng., 44, № 4 (1966).
52. Jackson R., Some algebraic properties of optimization problems in complex chemical plants, Chem. Eng. Sci., 19, № 1 (1964).
53. Aris R., Rudd D. F., Amundson N. R., An optimum cross-current extraction, Chem. Eng. Sci., 12, № 2 (1960).
54. Stanley E., Lee W. T., Optimization by a gradient technique, IEC Fundamentals, 3, № 4 (1964).
55. Van Cauvenberghe A. R., Optimization of multistage recycle systems, Chem. Eng. Sci., 22, № 2, 193 (1967).
56. Wang C. S., Fan L. T., Optimization of some multistage chemical processes, IEC Fundamentals, 3, № 1 (1964).
57. Островский Г. М., Волин Ю. М., Методы оптимизации сложных химико-технологических схем, Изд. «Химия», 1970.
58. Mitten L. G., Nemhauser G. L., Miltistage optimization, Chem. Eng. Progr., 59, № 1 (1963).
59. Rosen E. M., Further comments on the paper «Optimum cross-current extraction with product recycle», Chem. Eng. Sci., 19, № 12 (1964).

60. Zahradnik R. L., Archer D. H., Application of the discrete maximum principle to cross-current extraction with a simple recycle stream, IEC Fundamentals, 3, № 4 (1964).
61. Chien H., Optimization of Recycle Problem, IEC Fundamentals, 5, № 1 (1966).
62. Fan L. T., Wang C. S., Optimization of multistage processes with product recycle, Chem. Eng. Sci., 19, № 1 (1964).
63. Плискин Л. Г., Децентрализованное управление в производственных комплексах, в сб. «Вопросы управления большими системами», ЦНИИТЭ приборостроения, 1968.
64. Первозванский А. А., Первозванская П. Н., Децентрализация оптимального планирования в сложной системе, Автоматика и телемеханика № 7 (1968).
65. Плискин Л. Г., Условная оптимизация химического завода на основе согласования режимов реакторов, Автоматика и телемеханика, № 10 (1962).
66. Островский Г. М., Волин Ю. М., Методы оптимизации химических реакторов, Изд. «Химия», 1967.
67. Невский А. С., О распределении нагрузок между отдельными агрегатами, Изв. ВТИ, № 10 (1931).
68. Шифринсон Б. Л., Наивыгоднейшее распределение нагрузок между параллельно работающими электростанциями, Электрические станции, № 5 (1930).
69. Steinberg M. F., Smith T. H., Economy loading of power plant and Electric Systems, 1943.
70. Степанов В. А., Наивыгоднейшее распределение нагрузок в смешанных электроэнергетических системах с применением счетно-решающих устройств и автооператоров. Диссертация, МЭИ, 1956.
71. Либерман М. Д., Некоторые общие вопросы комплексной автоматизации, в сб. «Автоматизация химических производств», 1959, № 3.
72. Lee W. T., Computer control of a catalytic chemical processes, Control, 8, № 70, 71 (1964).
73. Робертс С., Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления, Изд. «Мир», 1965.
74. Cotter I. E., Computer control of production allocation for parallel process equipment, Control, 9, № 85 (1965).
75. Есьман И. Г., Насосы, Гостехиздат, 1954.
76. Степанов А. И., Центробежные и осевые компрессоры, воздуходувки и вентиляторы, Машгиз, 1960.
77. Насосы. Каталог-справочник, Машгиз, 1959.
78. Френкель М. И., Поршневые компрессоры, Изд. «Машиностроение», 1969.
79. Черкасский В. М., Романова М. М., Коуль Р. А., Насосы, компрессоры, вентиляторы, ГЭИ, 1962.
80. Рис В. Ф., Центробежные компрессорные машины, Изд. «Машиностроение», 1964.
81. Захаренко С. Е., Анисимов С. А., Дмитриевский В. А., Карпов Г. Е., Фотин Б. С., Поршневые компрессоры, Машгиз, 1961.

82. Крючков А. Д., Автоматизация поршневых компрессоров, Машгиз, 1963.
83. Балайка Б., Сикора К., Процессы теплообмена в аппаратах химической промышленности, Машгиз, 1962.
84. Касаткин А. Г., Основные процессы и аппараты химической технологии, Госхимиздат, 1960.
85. Рамм В. М., Абсорбционные процессы в химической промышленности, Госхимиздат, 1951.
86. Хоблер Т., Массопередача и абсорбция, Изд. «Химия», 1964.
87. Кафаров В. В., Основы массопередачи, Изд. «Высшая школа», 1962.
88. Минскер И. Н., Оптимальное распределение нагрузок между параллельными насадочными скрубберами, Труды ЦНИИКА, № 17 (1967).
89. Левеншпиль О., Инженерное оформление химических процессов, Изд. «Химия», 1969.
90. Вейлас С., Химическая кинетика и расчеты промышленных реакторов, Изд. «Химия», 1964.
91. Кафаров В. В., Методы кибернетики в химии и химической технологии, Изд. «Химия», 1968.
92. Вильямс С. Т. Дж., Проектирование химико-технологических процессов методами системотехники, Изд. «Химия», 1965.
93. Крамерс Х., Вестертерп К., Химические реакторы и управление ими, Изд. «Химия», 1967.
94. Панченков Г. М., Лебедев В. П., Химическая кинетика и катализ, Изд. МГУ, 1961.
95. Панченков Г. М., Расчет скоростей газовых химических реакций, протекающих в потоке. Гетерогенный катализ в химической промышленности, Госхимиздат, 1955.
96. Минскер И. Н., Оптимальное распределение нагрузок между параллельными реакторами с переменной активностью катализатора, Труды ЦНИИКА, № 15 (1966).
97. Эльсгольц Я. И., Вариационное исчисление, Гостехиздат, 1958.
98. Балакирев В. С., Дудников Е. Г., Цирлин А. М., Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления, Изд. «Энергия», 1967.
99. Кузин В. П., Алгоритм оптимального распределения нагрузок между агрегатами, «Автоматика и телемеханика», № 1 (1966).
100. Kompass E. J., The «Early Bird» goes automatic, Control Eng., 3, № 12 (1956).
101. Применение вычислительной техники в энергетике. Сб. ст. под ред. Гинзбурга, ГЭИ, 1959.
102. Neesel K., Thuilsiefje K., Ein newer Sielomant für mirtschaplich optimale Zastverteilung «Siemens-Z», 38, № 12 (1954).
103. Синьков В. М. и др., Вычислительное устройство для расчета наивыгоднейшего распределения нагрузок в сложных энергосистемах, в сб. «Автоматизация и приборостроение», вып. II, Киев, 1961.
104. Синьков В. М., Коваленко В. П., Счетно-решающие устройства «Экран-2» для расчета наивыгоднейшего распределения нагрузки в энергосистемах, в сб. «Автоматизация и приборостроение», вып. I, Киев, 1959.

105. Богословский А. В., Закидальский А. И., Шукайло Е. М., Специализированное вычислительное устройство для распределения нагрузок (ЭКРАН-7). Системы и средства автоматизации производства и управления. Научные труды института автоматики, т. 2, Киев, 1968.
106. Терно О. Р., Пиккоя О. М., Лэлумес Х., Счетно-решающее устройство для экономичного распределения нагрузок, Электричество, № 9 (1959).
107. Манукян Р. С., Об использовании вычислительной машины для расчетов оптимального распределения нагрузок между разнотипными агрегатами теплоэлектростанций, Электричество, № 4 (1962).
108. Элькин С. Р., Паверман С. В., Манукян Р. С., К вопросу разработки аналоговой вычислительной машины для экономичного распределения нагрузок в смешанных энергосистемах, Труды ТНИИСА, т. 3, ЦБТИ, 1962.
109. Усов С. В., Павлов Г. М., Кантан В. В., Решение задачи наивыгоднейшего распределения нагрузок на аналоговых вычислительных машинах, Изв. АН СССР, сер. энерг. и трансп., № 6 (1963).
110. Усов С. В. и др., Решение задачи наивыгоднейшего распределения нагрузок на счетно-решающей машине АНРАН-IV, Электричество, № 2 (1964).
111. Москалев А. Г., Метод расчета экономичного распределения нагрузок в энергосистеме и уставок системы автоматического регулирования частоты и активной мощности на серийных вычислительных машинах непрерывного действия, Электричество, № 8 (1962).
112. Качанова Н. А., Умедян В. В., Программирование для УВМ расчетов экономического распределения нагрузок в энергосистеме, Электричество, № 9 (1959).
113. Шаханов В. С., Общий алгоритм вычислительной и управляющей электронной цифровой машины для экономической оптимизации оперативных режимов сложных энергетических систем, Электричество, № 4 (1962).
114. Шаханов В. С., Методика вычисления на электронных цифровых машинах экономичного распределения нагрузок в гидротеплоэнергосистемах. Диссертация МЭИ, 1962.
115. Зайцев Н. Г. и др. Станционное устройство для автоматизации наивыгоднейшего распределения активных нагрузок в энергосистемах. Электричество, № 12 (1963).
116. Ковалев В. П., Пневматический оптимизатор распределения нагрузок между технологическими линиями химического производства. Техническая и экономическая информация. Серия «Применение вычислительной техники в химической и нефтехимической промышленности», вып. 2, НИИТЭХИМ, 1965.
117. Ланни Н. Д., Пневматические вычислительные устройства как средство обеспечения надежности систем комплексной автоматизации. Первый международный конгресс ИФАК по автоматическому управлению, 1960.
118. Dopazo I. E., Klitin O. A., Stagg G. W., Watson M., An optimization technique for real and reactive power allocation, Proc. IEEE, **55**, № 11 (1967).

119. Синьков В. М., Оксанич М. А., Панченко Т. Ф., Измерение относительных приростов расхода топлива и коэффициентов полезного действия котлоагрегатов. Автоматизация и приборостроение. Сб. научных трудов института автоматики Госплана УССР, вып. II, ГИТЛ УССР, Киев, 1961.

120. Воробьева Л. П., Крышин Г. Г., Соболев О. С., Хвилевицкий Л. О., Многоканальная система автоматического распределения потоков типа «Ритм», Труды ЦНИИКА, вып. 13, Изд. «Энергия», 1966.

121. Минскер И. Н., Корчинский А. В., Пеньевская Л. Б., Оптимальное распределение нагрузок между параллельными агрегатами. Труды II Всесоюзной конференции по оперативному управлению производством, 1968.

122. Минскер И. Н., Оптимальное распределение нагрузок между параллельно работающими агрегатами в химической промышленности, Диссертация, МИХМ, 1966.

123. Герш С. Я., Глубокое охлаждение, Госэнергоиздат, 1960.

124. Минскер И. Н., Приставко В. Ф., Пеньевская Л. Б., Талицкая Е. А., Моделирование скруббера медноаммиачной очистки газа для синтеза аммиака, Труды ЦНИИКА, № 17 (1966).

125. Коуль А. Л., Ризенфельд Ф. С., Очистка газа, Гостоптехиздат, 1962.

126. Жаворонков Н. М., Резников П. М., Абсорбция окиси углерода растворами медноаммиачных солей, Журн. хим. пром., 10, № 8 (1933).

127. Кафаров В. В., Перов В. Л., Вента Д. П., Тимофеев В. В., Выбор режима работы цеха очистки синтез-газа при значительных колебаниях нагрузки, Журн. хим. пром., № 8 (1970).

128. Жаворонков Н. М., Зельвенский Я. Д., Изучение процесса абсорбции углекислоты водой на опытном и промышленном скруббере, Журн. хим. пром., № 10 (1936).

129. Юшкевич П. Ф., Жаворонков Н. М., Зельвенский Я. Д., Коэффициенты абсорбции углекислоты водой в башнях с насадкой, Журн. хим. пром., № 5, 6 (1935).

130. Жаворонков Н. М., Гидравлические основы скрубберного процесса и теплопередача в скрубберах, Изд. «Советская наука», 1944.

131. Washimi Koichi, Asakura Masakage, Computer Control and Optimization, Chem. Eng., 73, № 22, 24 (1966).

Инна Наумовна Минскер

Оперативное управление химико-технологическими комплексами

Издательство «Химия», М., 1972 г.

224 с. УДК 66-5

Редактор *Р. М. Степанова*
Технический редактор *Г. И. Косачева*
Корректор *И. Д. Король*

Т 01471. Подписано к печати 22/II 1972 г. Формат бумаги 60×90 1/16. Печ. л. 14. Уч.-изд. л. 13,68. Тираж 3500 экз. Типогр. бум. № 2 Цена 1 р. 37 к. Тем. план 1972 г., № 85. Зак. 1325.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

1 р. 37 к.